



# Optimisation de la diffusion de l'énergie dans les smarts-grids

Guillaume Guérard

## ► To cite this version:

Guillaume Guérard. Optimisation de la diffusion de l'énergie dans les smarts-grids. Modélisation et simulation. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2014. Français. NNT : 2014VERS0049 . tel-01241153

**HAL Id: tel-01241153**

**<https://theses.hal.science/tel-01241153>**

Submitted on 10 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de DOCTEUR en  
Informatique

# OPTIMISATION DE LA DIFFUSION DE L'ÉNERGIE DANS LES SMART GRIDS

par *Guillaume Guérard*

**Soutenue publiquement le 27/11/2014 devant un jury composé de :**

<i>Rapporteurs</i>	Pr Dritan Nace	Professeur à l'Université de Compiègne
	Pr Yuri Tomashevsky	Professeur à l'Université de Saratov (Russie)
<i>Examineurs</i>	Pr Alain Bui	Professeur à l'Université de Versailles
	Pr Abdel Lisser	Professeur à l'Université Paris-Sud
	Pr Michael Krajecki	Professeur à l'Université de Reims
<i>Directeur de thèse</i>	Dr Ider Tseveendorj	MCF, HDR à l'Université de Versailles
<i>Co-directeur de thèse</i>	Dr Soufian Ben-Amor	MCF, HDR à l'Université de Versailles



# Résumé

Les systèmes technologiques actuels comprennent une composante sociétale due à l'impact des utilisateurs. Ces systèmes, dits complexes, comportent des sous-systèmes dont les acteurs ont des objectifs divergents voire antagoniques.

Considéré comme une évolution du réseau énergétique actuel, le Smart Grid est un parfait exemple de système complexe. Ce terme désigne en particulier un réseau électrique optimisé intégrant le comportement et les actions des utilisateurs (producteurs, consommateurs, consommacteurs, etc.). L'étude de la dynamique du système a pour objectif d'améliorer sa qualité et sa sécurité et de réduire son impact environnemental. Cependant, les simulations de Smart Grid actuelles sont généralement basées sur des technologies spécifiques, limitant l'évolution du modèle proposé.

Les défis liés au Smart Grid sont l'hétérogénéité des actions et de leurs intérêts divergeant, et une complexité à toute échelle, que ce soit spatiale ou temporelle. En effet, les entités du Smart Grid sont en compétition pour l'obtention de la ressource commune. Par exemple, les consommateurs ont des besoins énergétiques à un coût minimal tandis que les producteurs doivent contrôler la consommation, les pics de demande tout en maximisant leur profit. Les comportements et les relations entre les entités sont donc difficiles à modéliser. Des pressions externes et internes comme la dynamique des prix ou les productions erratiques des énergies renouvelables ont une influence sur la structure, l'organisation et le comportement des sous-systèmes et donc du système global. De plus, une mauvaise gestion peut provoquer de nombreuses défaillances du système telles que des brownouts, des blackouts ou des ruptures de lignes du réseau.

Nous proposons une modélisation intégrative pour aborder le concept de Smart Grid : chaque composante de notre modélisation prend en compte un aspect de ce dernier et leur intrication mène à une modélisation efficace à toute échelle. Les relations entre entités prennent en compte le caractère dynamique et un superviseur global surveille le réseau pour détecter les seuils critiques ou pour planifier les schémas de consommation future. Cependant, le modèle est impossible à appréhender tel quel et de nombreux scénarios testeront l'influence des divers paramètres, calibreront les algorithmes et ajusteront la gestion locale et globale pour une configuration donnée. Nous proposerons de nouvelles théories pour améliorer ce modèle au niveau de la structure, de la dynamique des prix ou une approche mathématique dans le but de rendre le modèle le plus efficace possible.

**Mots clés** : Modélisation systémique, Système complexe, Smart Grid, Demand-Side Management.

# Abstract

Current technological systems include a societal component due to the impact of users. These complex systems contain numerous sub-systems which actors have conflicting even antagonist objectives.

Considered as the evolution of the current Power Grid, the Smart Grid is a perfect example of complex system. This term refers to an electrical optimized network integrating the behavior and actions of users (generators, consumers, consumactors, etc.). These Power Grid's upgrades aim to improve quality and security, to reduce environmental impact. But current simulations are done on a specific technology and with a limited evolution.

Challenges of Smart Grid are related firstly to the heterogeneity of actors with different interests and secondly to a spatial and temporal multiscale complexity. Smart Grid actors are in a competitive access to a shared resource. For example, consumers express energy requirements with minimal cost while producers have to manage consumption, peaks and to maximize their profits. Dynamics behaviors and relations between entities are difficult to model. External and internal pressures as energy pricing, energy losses or the erratic production of renewable energies influence on the structure, the organization and the behavior of the subsystems and the overall system. Moreover, a bad management causes various structural problems like brownout, blackout, or partial failures.

We propose an integrative model to solve the Smart Grid: each component of our model allows to consider one aspect of the grid and it is their intricacy that achieves an efficient modeling. Relations between entities take into account the complex dynamics and an overall supervisor allows network monitoring to detect critical thresholds or to plan consumption schemes. However, the model is impossible to apprehend like this and different scenarios test the influence of parameters, calibrate algorithms and adjust global and local monitoring for a specific case. We also propose some theories to enhance the structural model, to integrate dynamic pricing or to help to calibrate by a mathematical approach of the global problem.

**Keywords:** Bottom-up modeling, Complex System, Smart Grid, Demand-Side Management;



# Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au laboratoire PRiSM de l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, sous la direction de Monsieur Ider Tseveendorj et Monsieur Soufian Ben Amor.

Je suis particulièrement honoré que Monsieur Dritan Nace, Professeur des Universités à l'Université de Technologie de Compiègne, et Monsieur Yury Tomashevsky, Professeur des Universités au Yuri Gagarin State Technical University of Saratov aient accepté d'examiner ce travail et d'en être rapporteurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier Monsieur Alain Bui, Professeur des Universités à l'Université de Versailles; Abdel Lisser, Professeur des Universités de l'Université Paris-Sud; et Michael Krajecki, Professeur des Universités à l'Université de Reims Champagne-Ardenne pour leur participation au jury.

J'aimerais remercier très sincèrement Monsieur Ider Tseveendorj, et Monsieur Soufian Ben Amor pour m'avoir guidée et pour avoir été présents quotidiennement tout au long de ces trois années de thèse pour que ces travaux soient réalisés dans d'excellentes conditions. Leurs conseils et leur constant soutien m'ont été d'une aide précieuse. Je remercie également Monsieur Devan Sohier, Monsieur Iulian Sandu Popa, Monsieur Franck Quessette et Madame Sandrine Vial pour m'avoir accepté en tant que moniteur.

Je remercie l'ensemble du laboratoire pour leur aide, leur bonne humeur, la qualité des moments que j'ai passés en leur compagnie. Je souhaiterais finir en exprimant ma profonde reconnaissance, à mes parents, à ma famille et à mes amis.





# Contents

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Contents</b>	<b>vii</b>
<b>List of Figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des algorithmes</b>	<b>xii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Analyse systémique</b>	<b>5</b>
<b>1 Smart Grid et Systèmes Complexes</b>	<b>7</b>
1.1 Gestion moderne de l'énergie . . . . .	9
1.1.1 Le réseau électrique . . . . .	9
1.1.1.1 Routage de l'énergie . . . . .	9
1.1.1.2 Gestion de l'offre et de la demande . . . . .	9
1.1.2 Émergence des énergies renouvelables et batteries . . . . .	10
1.2 Un réseau en évolution . . . . .	12
1.3 Une évolution nécessaire . . . . .	13
1.3.1 Une demande croissante . . . . .	13
1.3.2 Vers un réseau interactif . . . . .	15
1.4 Le concept de Smart Grid . . . . .	16
1.4.1 Un système de systèmes . . . . .	16
1.4.2 Modèles de Smart Grid . . . . .	19
1.4.2.1 Étude de la structure du réseau . . . . .	20
1.4.2.2 Étude de la résilience du réseau . . . . .	20
1.4.2.3 Centrale virtuelle ou microgrid . . . . .	21

1.4.2.4	Stockage et gestion locale de l'énergie . . . . .	21
1.4.2.5	Prix de consommation dynamique . . . . .	22
1.5	Système complexe . . . . .	22
1.5.1	Un système dynamique chaotique . . . . .	23
1.5.2	Théories liées aux systèmes complexes . . . . .	24
1.5.3	Défi de l'émergence . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Analyse d'un système complexe</b>	<b>31</b>
2.1	Analyse d'un système complexe . . . . .	32
2.1.1	Analyse cartésienne et analyse systémique . . . . .	32
2.1.2	Cas des systèmes complexes . . . . .	33
2.2	Anatomie d'un Smart Grid . . . . .	34
2.2.1	Le réseau de l'énergie . . . . .	34
2.2.1.1	Structure du réseau . . . . .	34
2.2.1.2	Variables du réseau . . . . .	35
2.2.1.3	Répartition des flux . . . . .	36
2.2.1.4	Stabilité du réseau . . . . .	36
2.2.2	Aperçu global . . . . .	38
2.3	Modélisation d'un Smart Grid . . . . .	40
2.3.1	Définition des sous-composantes . . . . .	40
2.3.2	Priorité de fonctionnement . . . . .	42
	<b>Modélisation intégrative</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation intégrative des Smart Grids</b>	<b>47</b>
3.1	Répartition locale de l'énergie . . . . .	49
3.1.1	Gestion des appareils . . . . .	49
3.1.2	Estimation de la consommation . . . . .	50
3.1.2.1	Choix de l'algorithme . . . . .	50
3.1.2.2	Processus de résolution . . . . .	50
3.1.3	Résolution d'un problème de sac à dos par programmation dy- namique . . . . .	51
3.1.4	Normalisation des données . . . . .	52
3.1.5	Processus de recherche d'une solution initiale . . . . .	54
3.1.5.1	Complexité . . . . .	56
3.1.5.2	Problématique autour de l'utilité . . . . .	57
3.2	Gestion de l'offre et de la demande . . . . .	57
3.2.1	Problème de l'offre et de la demande . . . . .	58
3.2.1.1	Choix de l'algorithme . . . . .	58
3.2.1.2	Interaction consommateur-fournisseur . . . . .	58
3.2.2	Cas d'étude : enchères de type aléatoire centrée . . . . .	59
3.2.3	Rétroaction . . . . .	62
3.2.4	Attribution finale . . . . .	62

3.2.5	Cas général : complexité du niveau microgrid . . . . .	63
3.3	Transport de l'énergie . . . . .	63
3.3.1	Problème de routage . . . . .	63
3.3.1.1	Choix de l'algorithme . . . . .	63
3.3.1.2	Déroulement de la rétroaction . . . . .	64
3.3.2	Résolution d'un problème de routage . . . . .	64
3.3.2.1	Problème de réseau de transport . . . . .	64
3.3.2.2	Problème de flot maximum . . . . .	66
3.3.3	Mise à jour du réseau . . . . .	67
3.3.4	Recherche des goulots d'étranglement . . . . .	69
3.4	Pronostics . . . . .	71
3.4.1	La politique d'apprentissage . . . . .	71
3.4.2	Pronostics utilisés dans notre cas d'étude . . . . .	73
3.5	Récapitulatif . . . . .	73
3.5.1	Point de vue structurel . . . . .	73
3.5.2	Point de vue algorithmique . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Outils d'amélioration du modèle</b>	<b>79</b>
4.1	Étude prétopologique du réseau . . . . .	80
4.1.1	Famille de prétopologies . . . . .	80
4.1.2	Recherche de flot maximum à cout minimum . . . . .	81
4.1.3	Exemple de l'utilisation de la prétopologie dans un Smart Grid . . . . .	82
4.2	Modélisation par la théorie des jeux . . . . .	84
4.2.1	Théorie des jeux . . . . .	84
4.2.2	Terminologie . . . . .	85
4.2.3	Jeu sous forme stratégique . . . . .	86
4.2.3.1	Stratégies dominées . . . . .	86
4.2.3.2	Équilibre dans un jeu . . . . .	87
4.2.3.3	Critère de Pareto . . . . .	88
4.3	Jeux et stratégies de consommation . . . . .	89
4.3.1	Gestion de l'énergie . . . . .	89
4.3.2	Jeux au niveau des microgrids . . . . .	91
4.4	Régulation de la courbe de consommation . . . . .	92
4.4.1	Limitation des variations . . . . .	92
4.4.2	Utilisation de la norme . . . . .	93
4.4.3	Application lipschitzienne . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Outils d'optimisation mathématique</b>	<b>97</b>
5.1	Problème d'optimisation . . . . .	98
5.1.1	Conditions d'optimalité classiques . . . . .	98
5.1.2	Problème de maximisation convexe ou minimisation concave . . . . .	99
5.1.3	Condition d'optimalité par l'espace de Lebesgue . . . . .	100
5.2	Maximisation convexe . . . . .	101

5.3	Analyse mathématique du Smart Grid . . . . .	102
5.3.1	Problème de Sac à dos . . . . .	102
5.3.2	Vers un problème de maximisation convexe . . . . .	104
5.4	Résultats préliminaires . . . . .	105
5.4.1	Méthode de la recherche locale . . . . .	105
5.4.2	Méthode de la coupe par plan . . . . .	105
5.4.3	Maximum d'une boule . . . . .	106
5.4.4	Maximum d'une boîte . . . . .	107
5.5	Approximation interne et externe . . . . .	108
5.6	Vérification des conditions d'optimalité . . . . .	109
5.7	Algorithmes . . . . .	112
5.7.1	Approximation interne : algorithme 5.2 . . . . .	112
5.7.2	Combinaison avec l'approximation externe : algorithme 5.3 . . . .	112
5.7.3	De la boîte à l'hyper-rectangle . . . . .	114
5.7.4	Résultats . . . . .	117
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>
	<b>Annexes</b>	<b>125</b>

# List of Figures

1.1.1	Transport de l'énergie, des producteurs aux consommateurs. . . . .	10
1.1.2	Prévisions de la consommation (source RTE). . . . .	11
1.3.1	Prévisions d'augmentation de la demande en électricité (source RTE). . .	14
1.3.2	Fonctions intelligentes du Smart Grid. . . . .	16
1.4.1	Gestion bidirectionnelle de l'énergie (source CRE). . . . .	18
1.5.1	Espace de phases d'un pendule sans et avec frottement. . . . .	24
1.5.2	Théories liées aux systèmes complexes. . . . .	25
1.5.3	Dynamique des groupes : vol d'oiseau à partir de trois règles élémentaires individuelles. . . . .	26
1.5.4	Comportement collectif : Phénomène de ségrégation via le logiciel Net Logo. . . . .	26
2.2.1	Structure du réseau énergétique français (source ERDF). . . . .	35
2.2.2	Dispersion de l'électricité dans un réseau. . . . .	37
2.2.3	Problème de congestion sur les lignes hautes tensions. . . . .	37
2.2.4	Structure d'un réseau électrique. . . . .	39
2.2.5	Deux microgrids. . . . .	39
2.3.1	Schématisation du réseau (source Siemens). . . . .	41
3.1.1	Diagramme d'activité du niveau local. . . . .	51
3.2.1	Diagramme d'activité du niveau microgrid. . . . .	59
3.2.2	Densité de probabilité de la loi normale. . . . .	60
3.3.1	Diagramme d'activité du niveau T&D. . . . .	65
3.3.2	Ajustement par le graphe résiduel. . . . .	70
3.3.3	Rétroaction par recherche de meilleur production et consommation. . .	71
3.5.1	Déroulement de la résolution. . . . .	74
3.5.2	Schéma séquentiel d'une itération. . . . .	75
4.1.1	Adhérence et intérieur de A. . . . .	80
4.1.2	Première itération de l'algorithme de Busacker et Gowen. . . . .	82
4.1.3	Famille de prétopologies. . . . .	83
4.1.4	Graphe finale. . . . .	83
4.2.1	Le dilemme du prisonnier. . . . .	88

4.4.1	Impact des normes de la pente et de la régularité sur la courbe de charge classique. . . . .	93
4.4.2	Application k-lipschitzienne. . . . .	94
4.4.3	Impact de la gestion sur le cout de l'énergie. . . . .	96
5.1.1	Ensemble convexe et concave. . . . .	99
5.3.1	Problème de sac à dos du Smart Grid. . . . .	103
5.4.1	Obtention d'un maximum local par recherche local. . . . .	106
5.5.1	Recherche du centre de plus grande sphère interne. . . . .	109
5.6.1	Coupe par plan. . . . .	111
5.7.1	Algorithme IA . . . . .	112
5.7.2	Algorithme IOA. . . . .	114
5.7.3	Algorithme de Gram-Schmidt. . . . .	116

# Liste des algorithmes

3.1	Construction du sac optimal. . . . .	53
3.2	PGCD par algorithme d'Euclide étendu. . . . .	54
3.3	Attribution de l'énergie. . . . .	55
3.4	Données de consommation. . . . .	56
3.5	Enchères du microgrid. . . . .	61
3.6	Ford-Fulkerson. . . . .	68
3.7	Ajustement par un graphe résiduel. . . . .	69
5.1	Coupe par plan. . . . .	111
5.2	Approximation interne (IA). . . . .	113
5.3	Approximation interne et externe (IOA). . . . .	115
5.4	Processus de Gram-Schmidt. . . . .	116





# Introduction

La science des systèmes complexes étudie les systèmes comportant un grand nombre de composants par nature indépendants, fortement interconnectés et en interaction. Ces interactions adaptatives entre les parties du système peuvent révéler des phénomènes d'émergence et d'auto-organisation, dans lesquels des processus d'apprentissage et d'évolution apparaissent. Ces systèmes sont dits complexes par rapport à la complexité à les représenter et à les modéliser dans leur totalité.

Les systèmes technologiques actuels comprennent une composante sociétale due à l'impact des utilisateurs. Ces systèmes, dits socio-techniques, comportent des sous-systèmes dont les acteurs ont des objectifs divergents. La dynamique de ces réseaux amène de la complexité et les rend difficiles voire impossibles à prédire sur la seule analyse des sous-parties du système. Les outils et méthodes pour la modélisation des systèmes complexes sont relativement pauvres. Nous proposons dans ce travail, plusieurs contributions pour l'analyse et l'optimisation de tels systèmes.

Le Smart Grid est une parfaite illustration de système complexe. Considéré comme l'évolution du réseau électrique actuelle, la vision que nous pouvons avoir du Smart Grid est celle d'un réseau complexe où les flux bidirectionnels d'informations et d'électricité permettent un ajustement en temps réel de la demande, de l'offre, de la distribution et du transport. La mise en place d'un système technologique de surveillance continue du réseau est une des évolutions prévues du réseau électrique. D'ici 2030, certains scénarios prédisent une augmentation jusqu'à 70% de la demande en électricité, tandis que la principale source de production - l'énergie nucléaire - pourrait diminuer en raison de projets de lois européens. L'intégration stratégique des énergies renouvelables sur le réseau va devenir un enjeu primordial. De plus, nouvel élément au cœur du Smart Grid, le consommateur devient consommacteur en prenant pleinement part à la dynamique de ce système.

Les défis du Smart Grid sont liés d'une part à cette hétérogénéité d'acteurs ayant des intérêts divergents et d'autre part à une complexité multi-échelle spatiale et temporelle. D'un côté, les défis statiques du Smart Grid regroupent les problèmes de modélisation ponctuels tels que la prévision de la production des énergies nouvelles, de la consommation future ou de la planification de schémas de gestion énergétique. Cependant, les énergies renouvelables ont des productions irrégulières dépendant de conditions externes aléatoires. Il faut donc envisager des solutions pour stocker l'énergie dans les périodes de surproduction. La détection et la gestion des pannes est aussi un objectif essentiel pour le bon fonctionnement du Smart Grid. Le réseau de capteurs mis en place doit

pouvoir détecter des seuils d'alerte indiquant une panne et savoir réagir en conséquence.

D'autre part, les défis dynamiques du Smart Grid sont liés à l'adaptabilité du système et à sa complexité structurelle. La topologie du réseau électrique évolue en temps réel au gré des congestions et des pannes, et ne se base pas uniquement sur des notions métriques. Les relations entre consommateurs et producteurs sont complexes car elles comprennent des objectifs économiques divergents. Des dynamiques complexes telles que la tarification de l'énergie ou les pertes énergétiques sont également à prendre en compte. Nous devons donc développer une algorithmique adaptée à ces problèmes, afin de garantir le bon fonctionnement du système et assurer une qualité continue aux consommateurs.

Nous proposons ici une modélisation intégrative et autonome, i.e. un modèle auto-adaptable dynamique dont chaque composante permet de prendre en compte un aspect du Smart Grid. L'intrication des composantes réalise une modélisation efficace du système complexe étudié.

La recherche opérationnelle classique fournit des algorithmes locaux d'optimisation combinatoire, permettant par exemple de maximiser l'utilisation d'une ressource en respectant une ou plusieurs contraintes. Le problème principal est le partage de la ressource commune, l'énergie, parmi tous les consommateurs. Il prend en compte de nombreuses contraintes dues au routage, à la distribution et la consommation. Mais ce problème comprend des millions d'éléments, sa résolution en temps réel n'est pas envisageable. De plus, un optimum global peut s'avérer un mauvais compromis au niveau des consommateurs.

D'autres contraintes sont à prendre en compte. La structure du réseau influe sur les relations entre entités. Le caractère intermittent de certaines sources d'électricité induit une dynamique complexe de la connectivité des sources et du flux d'énergie. Les problèmes de pertes énergétiques et de congestion ne sont pas directement modélisables par des seuls critères quantitatifs fixés. Nous sommes contraints de modéliser des critères qualitatifs associés à des dynamiques complexes par une théorie adaptée.

Cependant, le modèle décrit ci-dessus est impossible à appréhender tel quel, il est nécessaire de mettre en place une simulation informatique pour explorer les différents paramètres et tester différents scénarios pour illustrer la pertinence des méthodes. Cette simulation permet de tester l'influence du paramétrage du réseau de distribution, le calibrage des algorithmes d'optimisation, et la surveillance globale et locale du système. Elle peut devenir, selon son utilisation, un réel outil d'aide à la décision.

Ce mémoire de thèse est composé de cinq chapitres :

- Le chapitre 1 est un état de l'art des systèmes complexes dont le Smart Grid fait partie. Nous présenterons les définitions des systèmes complexes et leurs principales propriétés. Puis le concept de Smart Grid, et nous expliquerons pourquoi le Smart Grid est un système complexe.
- Le chapitre 2 décrit une analyse fonctionnelle et théorique de systèmes complexes. L'analyse systémique du Smart Grid permettra de déterminer ses sous-composantes ainsi qu'un modèle général d'un réseau de distribution énergétique bidirectionnelle.

- 
- Le chapitre 3 expose une modélisation intégrative du Smart Grid. Nous proposons l'agrégation de plusieurs théories permettant chacune de répondre à un problème du Smart Grid. La synergie entre ces théories permet une modélisation efficace. Le modèle proposé est un outil d'aide à la conception, i.e. un modèle sans contexte résolvant le problème général et pouvant être modifié pour correspondre à l'intégration d'autres technologies ou théories.
  - Le chapitre 4 présente le développement du modèle proposé. Les théories nécessaires pour rendre le réseau adaptatif et autonome seront décrites. Parmi ces dernières, la prétopologie associée à un problème de flot maximum à cout minimum modélise un réseau pouvant détecter et réparer ses erreurs. La théorie des jeux couplée à des stratégies de gestion de la domotique garantit des couts minimaux pour le consommateur et le producteur. Des méthodes mathématiques d'aplanissement de la courbe de charge impactera les pronostics afin de limiter les pics de consommation et ainsi garantir un prix bas constant.
  - Le chapitre 5 est consacré à l'analyse mathématique du modèle. Des méthodes de résolution d'un problème de maximisation convexe quadratiques seront proposées afin de connaître la solution optimale de notre problème, et ainsi pouvoir proposer un paramétrage rendant le système plus performant.



# Analyse systémique

"Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited, whereas imagination embraces the entire world, stimulating progress, giving birth to evolution." "

---

*(Albert Einstein)*



# Chapter 1

## Smart Grid et Systèmes Complexes

Le réseau électrique moderne est basé sur les travaux de Nikola Tesla de 1888 et 1896. De nos jours, il a évolué, de nouvelles technologies sont apparues et la consommation énergétique est devenue essentielle dans tous les domaines. Cependant, certains processus ou algorithmes de gestion sont devenus obsolètes, tel que la transmission centralisée et unidirectionnelle ou la gestion de la demande.

Au cours des deux dernières décennies, le réseau électrique a montré ses limites. Les problèmes sur le réseau, que ce soit des coupures ou des surtensions ponctuelles, sont de plus en plus fréquents. Le réseau électrique ne permettra pas de faire face à la hausse de consommation mondiale, il a besoin d'évoluer, de devenir un réseau intelligent pour corriger ses principales lacunes :

- Sécurité du réseau : que ce soit au niveau du consommateur ou du producteur, le réseau n'est pas sécurisé au niveau physique ou informatique. Par exemple, il est possible de connaître la consommation d'un utilisateur, ou de modifier les données de ce dernier aux yeux du producteur.
- Utilisation des énergies renouvelables : l'arrivée des énergies renouvelables n'est pas récente. Mais leur rentabilité augmente, leur nombre accroît, et de nouveaux types de centrales émergent de ces technologies. Que ce soit une petite ou une grande production, leur production est erratique et leur gestion difficile.
- Conservation de l'énergie : les batteries se sont développées et leur capacité est devenue assez importante pour entrer en compte dans la gestion de l'énergie. Ces batteries sont à la fois capables de consommer ou de produire. Mais pour avoir un impact sur le réseau, ces batteries doivent faire partie d'une gestion intelligente afin de ne pas accentuer les pics de consommations.
- Gestion de la demande : la domotique, l'ensemble des appareils consommateurs intelligents, peut fournir à un outil de gestion des données sur leur consommation, le temps de consommation et ses cycles. Cependant, actuellement, le réseau ne peut pas exploiter ces données, et leur gestion est bien souvent délaissée ou manuelle.
- Gestion de la production : la production se base sur des schémas journaliers déterminés par les années précédentes, une étude de la température et une analyse à moyen terme de la consommation. La surproduction est essentielle pour le maintien



des fonctions du réseau afin de faire face à l'évolution de la consommation. Au cours de ce chapitre, le réseau énergétique moderne sera détaillé plus en détail. Le concept de Smart Grid, décrit comme un réseau énergétique intelligent, possède divers définition, les caractéristiques et les propriétés principales serviront de base à un modèle générale. Par la suite, les systèmes complexes seront introduit afin de fournir les outils d'analyse et les théories nécessaires à la modélisation d'un Smart Grid sans contexte et adaptatif.

## **1.1 Gestion moderne de l'énergie**

La production de l'électricité fait appel à différents types de technologies : le transport, la gestion, le marché de l'énergie et les nouvelles technologies. La fonction de transmission achemine l'électricité des moyens de production aux centres de distribution et aux gros consommateurs industriels. Les nœuds sont connectés par un système de lignes de transmission, avec un transformateur qui réduit ou augmente le voltage dans les nœuds selon une situation de production ou bien de distribution. Cette grille est considérée comme un monopole naturel et il serait très coûteux et peu efficace de la dupliquer.

### **1.1.1 Le réseau électrique**

#### **1.1.1.1 Routage de l'énergie**

L'électricité est transportée des producteurs aux consommateurs finaux à travers un réseau composé de lignes interconnectées (voir figure 1.1.1). Les lignes de transmission ont des capacités finies et le flux nécessite une forte résistance durant sa transmission, ce qui provoque des pertes induisant des coûts très élevés.

Bien que des méthodes de modélisation des flux existent, l'électricité n'est théoriquement pas traçable : la loi de Kirchhoff impose que l'injection de l'énergie dans un point A de la grille de transmission, qui sera par la suite soutirée d'un point B, passe par tous les chemins possibles de la grille plutôt que le chemin direct AB. Cette condition implique une forte perturbation du réseau quand une ligne est saturée. Évidemment, l'établissement d'un contrat bilatéral entre un producteur et un consommateur d'énergie situés dans deux points différents de la grille, doit non seulement tenir compte de la capacité sur la ligne directe, mais aussi de la capacité sur les autres lignes du réseau interconnecté.

#### **1.1.1.2 Gestion de l'offre et de la demande**

A chaque instant, il doit y avoir un équilibre entre la quantité d'énergie injectée et la quantité soutirée. Cette condition assure la faisabilité de la grille et maintient l'équilibre entre l'offre et la demande. Cela requiert une planification et une centralisation de l'information à partir de tous les participants au marché, ainsi qu'un partage adéquat de la ressource commune. Cela est généralement assuré par un seul opérateur connu par le nom d'opérateur du système ou de gestionnaire du réseau de transport comme le montre la figure 1.1.2.

Les fournisseurs en gros ou agrégateur achètent de l'énergie à partir des producteurs pour la revendre après. La distribution locale de l'énergie est gérée par ces derniers. Ils réalisent l'approvisionnement de l'électricité et fournissent les services de base aux consommateurs finaux tels que la maintenance et la distribution.

La demande de l'électricité est cyclique et fortement volatile de par son utilisation au niveau de millions de consommateurs, donc en partie imprévisible. La demande

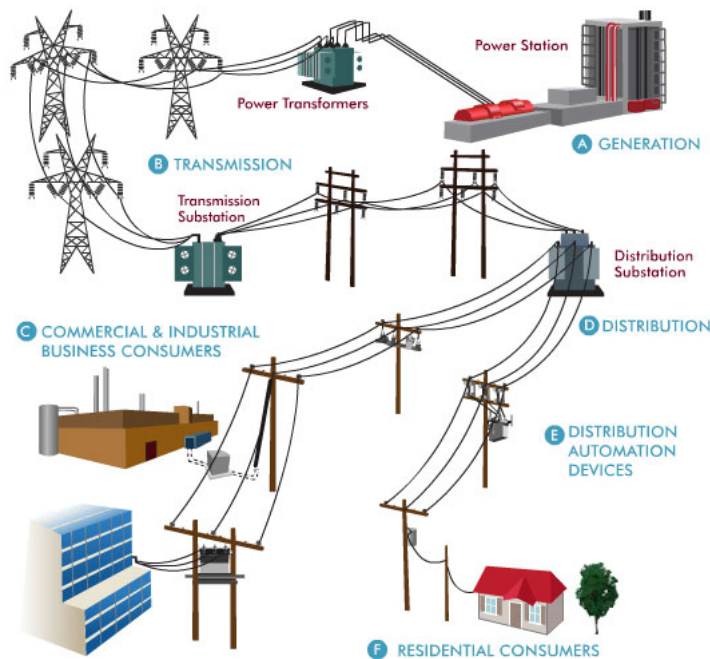


Figure 1.1.1 – Transport de l'énergie, des producteurs aux consommateurs.

est planifiée un jour, une semaine ou bien un an avant le marché en temps réel, cela étant donné les conditions économiques, sociales et météorologiques. Les prévisions de la consommation faites plusieurs jours à l'avance se basent sur les niveaux de consommation des jours précédents combinés à la prévision des conditions climatiques.

L'opérateur du système veille à l'équilibre entre l'offre et la demande d'électricité. Dans les marchés électriques dérèglementés, l'opérateur anticipe le niveau de la demande pour chaque intervalle de temps et organise un marché dans lequel les producteurs soumettent plusieurs offres de vente d'énergie. Pour chaque offre, le producteur indique un prix unitaire de vente et une quantité d'énergie proposée. Le prix de marché sera celui de la dernière offre acceptée, c'est à dire l'offre qui permet d'atteindre le niveau de la demande requis par l'opérateur du système.

La séquence des marchés d'énergie se termine avec le marché du temps réel. C'est le dernier moment où les participants peuvent acheter ou vendre de l'énergie pour chaque intervalle de livraison. En temps réel, les producteurs et les consommateurs injecteront ou soutireront une certaine quantité d'énergie sur chaque intervalle de livraison.

### 1.1.2 Émergence des énergies renouvelables et batteries

Les énergies renouvelables sont des énergies écologiques car faiblement émettrices de gaz à effet de serre. L'exploitation des énergies renouvelables permet de fournir de l'électricité aux sites isolés et d'éviter la création de nouvelles lignes. Ce sont les raisons pour lesquelles la plupart des États font des énergies renouvelables une priorité de leur

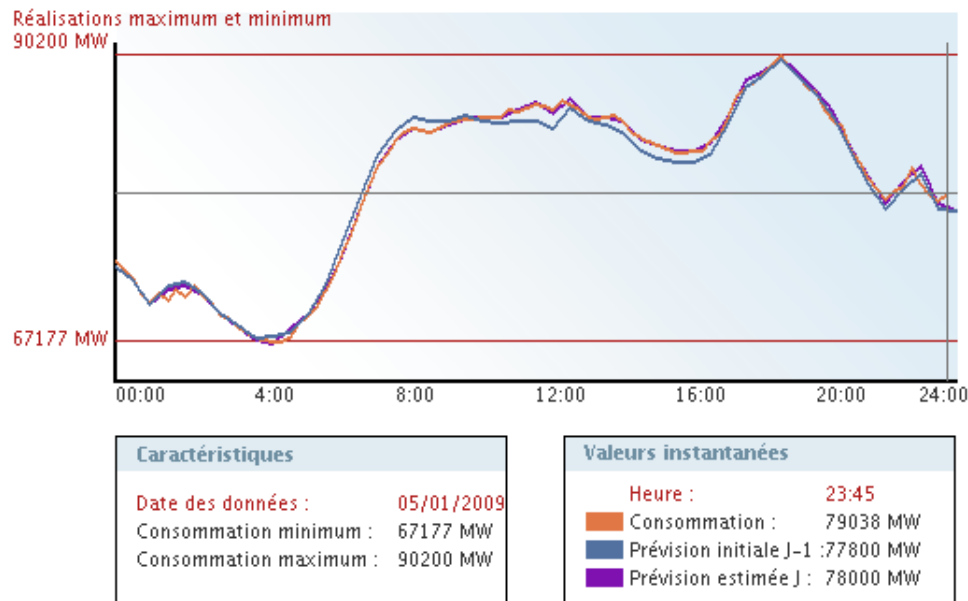


Figure 1.1.2 – Prévisions de la consommation (source RTE).

politique énergétique.

Ainsi, depuis une vingtaine d'années, la réglementation dans le domaine de l'énergie connaît de profondes évolutions. Au plan international, une convention Climat a été signée en juillet 1992 et le protocole de Kyoto en 1997, protocole dans lequel 35 pays industrialisés se sont engagés à réduire leurs émissions de gaz à effet de serre entre 2008 et 2012. En décembre 2009 a également été signé l'accord de Copenhague.

Au plan européen, depuis 2007, l'Union européenne s'est fixé l'objectif des Trois 20 : une réduction de 20 % des émissions de gaz à effet de serre par rapport à 1990, voire 30 % en cas d'accord international, une amélioration de 20 % de l'efficacité énergétique et une part de 20 % d'énergies renouvelables dans la consommation énergétique finale. Afin d'atteindre ces objectifs, un paquet Énergie-Climat a été signé en 2008, dont l'un des textes principaux est la directive 2009/28/CE du 23 avril 2009 relative aux énergies renouvelables. Elle répartit l'effort entre les États membres en fixant des objectifs nationaux en matière d'utilisation des énergies renouvelables pour les transports, la production de chaleur et la production d'électricité, tout en mettant en avant les économies d'énergie et l'efficacité énergétique.

La multiplication de ces installations aura des impacts notoires sur le système et les réseaux électriques. En effet, une partie de la production d'origine renouvelable est intermittente et peu ou pas pilotable alors que les réseaux électriques ont été conçus à l'origine pour acheminer l'électricité produite de façon centralisée dans un seul sens, de la production vers la consommation. L'injection de cette production implique désormais un fonctionnement bidirectionnel des réseaux électriques.

Le développement des énergies renouvelables décentralisées (éolien, photovoltaïque,

petite cogénération, etc.) raccordées aux réseaux électriques va profondément modifier la structure, la planification et l'exploitation du système électrique. Dans un futur proche, les réseaux auront pour rôle non seulement de distribuer l'électricité produite, mais également de mutualiser l'ensemble des productions décentralisées.

Dans le même temps, les réseaux électriques doivent toujours remplir les objectifs fondamentaux qui leur ont été assignés. Ils doivent garantir la sécurité, la stabilité, la fiabilité, l'égalité d'accès et la qualité de l'alimentation et de service. Ces installations de production sont donc un véritable défi pour les gestionnaires de réseaux.

Néanmoins la juridiction de nombreux pays freine considérablement l'essor des énergies renouvelables et la création de nouvelles technologies en vue d'une rénovation du réseau énergétique. Parmi les nombreux chemins pouvant conduire à un gain important au niveau de la production, de la consommation et de la gestion de l'énergie, peu d'entre eux sont actuellement compatible avec les lois en vigueur et ne pourront probablement jamais être testé en taille réelle sans une modification de ces restrictions.

De plus, de nombreux industriels développent de nombreux appareils ou algorithmes de gestion possédant leur propre norme et contraintes de fonctionnement. Les diverses technologies étant en concurrence directe, il n'existe pas de système de communication entre elles, freinant considérablement la possibilité d'une gestion intelligente de l'ensemble.

## 1.2 Un réseau en évolution

Ces dernières années, de nombreuses coupures de courant aux États-Unis et en Europe ont attiré l'attention sur les problèmes de sécurité dans les systèmes électriques. Quand une ligne d'alimentation tombe en panne, le courant électrique est déplacé vers les lignes voisines, qui, dans la plupart des cas, sont capable de gérer la charge supplémentaire. Il peut arriver que certaines lignes soient surchargées, tombent en pannes et doivent redistribuer leur charge chez leur voisins. Au final, une cascade d'échec à des conséquences sur l'ensemble du système électrique. En particulier, Albert [2] a étudié la capacité Nord-Américaine du réseau électrique pour résister aux cascades d'échecs. Les résultats indiquent que si 4% des nœuds possédant une très haute charge sont perturbés, alors le système global perd 60% de sa performance. Nous devons faire la distinction entre le phénomène de congestion et ce qu'on appelle communément « surcharges » sur le réseau.

Une surcharge se produit lorsque le transit en temps réel d'une ligne met en péril la sécurité de cette ligne. Ces surcharges surviennent de façon inattendue lors de la conduite du réseau en temps réel et sont dues principalement à des aléas survenant sur le réseau. Elles ne sont pas spécialement liées à la restructuration du secteur de l'électricité et sont résolues par des mesures d'urgence classiques (protections, reconfiguration du réseau, etc.) sans optimisation économique. Le phénomène de congestion se rapporte plus à une incapacité du réseau à conduire tels quels les plans établis par le marché de l'énergie. C'est un problème technique, mais dont la cause est économique. La pression du marché génère des contraintes chroniques sur le système qui doivent être traitées dans un cadre prévisionnel. Les méthodes de traitement de congestions cherchent pour la plupart à

optimiser les coûts induits par ces contraintes

Les problèmes de congestion étant connus depuis longtemps, diverses techniques ont été mises au point via le marché de l'énergie :

1. Market Splitting en Norvège [22].
2. Interchange Distribution Calculator (IDC) aux États-Unis d'Amérique.
3. Optimal Power Flow (OPF) dans divers pays [21].
4. Le Buy Back dans divers pays [13].

Cependant, la connaissance du réseau est jugée encore insuffisante, et il y a un besoin de plus en plus grand pour les acteurs du marché de faire la lumière sur la réalité et les causes exactes des congestions. De telles questions sont posées de la part d'acteurs du marché qui ont été particulièrement pénalisés par l'existence de congestions et qui désirent un traitement le moins arbitraire possible et une transparence de l'attribution de coûts de congestion à chaque acteur. Le traitement des congestions étant surtout un problème de nature stratégique, la question de l'allocation des coûts de congestion est reconnue comme étant cruciale [53].

Récemment, des méthodes de traçabilité basées sur une analyse topologique des transits de puissance (MIC) ont été proposées [8]. Elles se basent sur un principe de division proportionnelle qui est un postulat non démontrable physiquement. L'avantage de la MIC est qu'elle s'appuie exclusivement sur le modèle du calcul de répartition de charge et sur le principe de l'agrégation des productions et charges au même nœud. Dans la méthode de Singh [38], les coûts de congestion sont alloués directement aux consommateurs sur la base de ces facteurs. Dans la méthode proposée par Yu et Ilic [61], les coûts de congestion ne sont pas alloués individuellement aux consommateurs, mais sont alloués plutôt à des portefeuilles de participants au marché.

Cependant, la liberté de choix de fournisseur ainsi que l'entrée de nouveaux arrivants sur le marché concurrençant le producteur historique se traduisent concrètement par de profonds changements dans la répartition de la production sur l'ensemble du réseau. Dans ce cas, une allocation mettant plus l'accent sur les contributions des producteurs aux transits congestionnés semble plus appropriée. En effet, une allocation destinée exclusivement ou principalement aux consommateurs aurait tendance à plus cibler la localisation géographique des consommateurs que leur choix économique. Il est ainsi possible qu'un consommateur reçoive un paiement élevé pour une congestion relevant d'un changement de production, sans qu'il ait été forcé à l'origine de ce changement de production.

## **1.3 Une évolution nécessaire**

### **1.3.1 Une demande croissante**

D'ici 2030, la consommation mondiale d'électricité devrait augmenter de un à deux par rapport à celle de 2007 d'après l'International Energy Agency. Divers scénarios

prédisent aussi un manque à venir de pétrole d'ici environ 20 ans. Ce manque devra être compensé par l'augmentation de la ressource électrique.

L'apparition prochaine de nouvelles technologies, parmi lesquelles nous pouvons prédire l'arrivée massive des voitures électriques, va stimuler la demande. Le graphique 1.3.1 présente les évolutions possibles de la consommation électrique en France selon différents scénarios envisagés. Les scénarios "haut" et "bas" illustrent les cas extrêmes. Le scénario "référence" est l'hypothèse de base pour les autres scénarios. Le scénario "MDE renforcée" prend en compte l'accélération de la maîtrise de la demande d'énergie (MDE) en incluant des modifications des comportements de consommation, des optimisations de gestion des bâtiments.

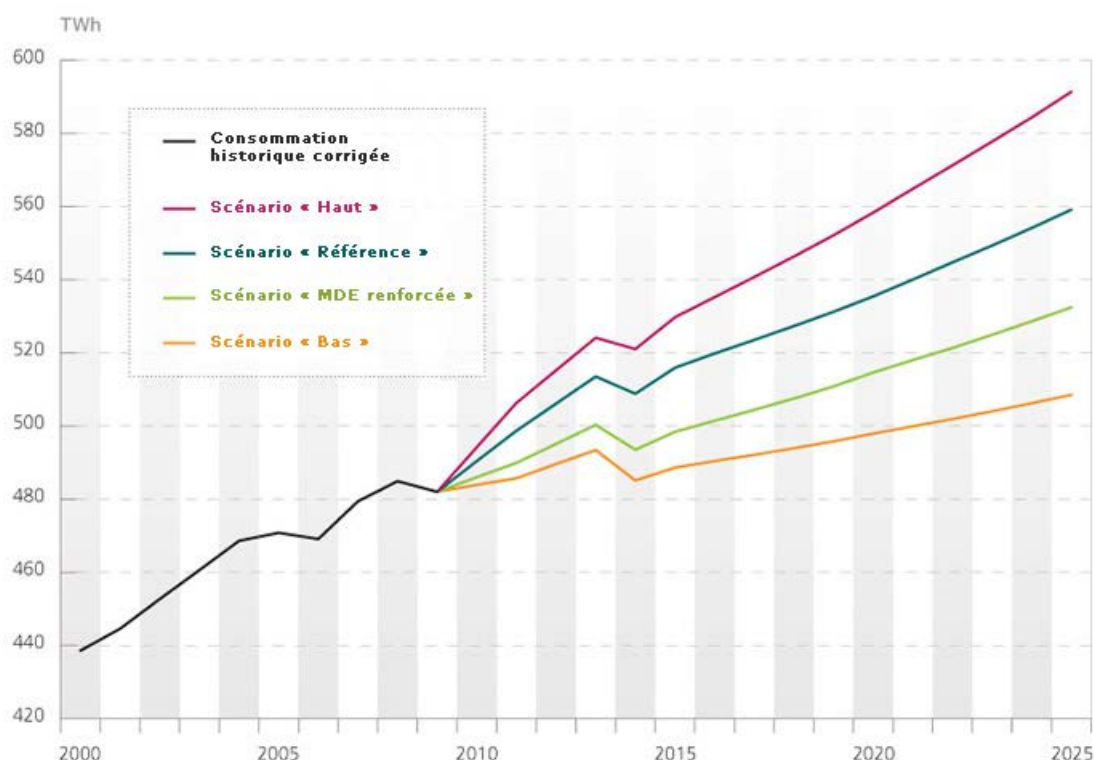


Figure 1.3.1 – Prévisions d'augmentation de la demande en électricité (source RTE).

La grille actuelle va donc devenir obsolète. En effet, il est difficile de greffer de nouveaux équipements face à de nouvelles demandes sur un réseau déjà existant et qui n'a pas été pensé pour cet usage. C'est par exemple le cas pour la gestion des énergies renouvelables. Le problème de ces énergies est leur intermittence de fonctionnement qui dépend des conditions climatiques et météorologiques. Il est donc difficile d'assurer une fourniture stable d'électricité aux consommateurs en se basant uniquement sur des énergies de ce type. De plus, les heures de production ne correspondent pas toujours à des demandes en électricité. L'électricité produite, sans solution de stockage est perdue.

De plus, la grille actuelle est basée sur une infrastructure vieillissante : les transformateurs et les lignes principales ont plus de 40 ans, et les stations plus de 20 ans. La perte d'énergie et d'information lors des processus de transmission et distribution n'est pas contrôlable. Les flux d'informations sont pauvres : la plupart des compteurs électriques ne fournissent pas d'information en temps réel et le relevé des données n'est effectuée que 2 fois par an. Enfin, face à l'enjeu mondial du réchauffement climatique, l'Union Européenne a mis en place des objectifs à tenir d'ici 2020 en vue de diminuer les émissions de gaz à effet de serre, optimiser l'intégration des énergies renouvelables, et baisser la consommation énergétique. Ces mesures ne sont possibles qu'après mise en place d'un réseau intelligent capable de connaître en tout point l'état du système et de le gérer de manière efficace.

### 1.3.2 Vers un réseau interactif

Afin de gérer ce réseau, il est nécessaire de procéder à des changements importants sans en perturber le fonctionnement. Cette évolution importante liée aux besoins de la science se rapproche de la vision de Kuhn [37]. Cela se traduit dans le cadre de la grille par la mise en place d'un réseau de capteurs et compteurs intelligents pour communiquer les données de production et consommation afin d'assurer l'équilibre entre l'offre et la demande. Le réseau électrique intelligent (Smart Grid) sera alors communiquant et interactif.

En France, ERDF, principal distributeur d'énergie, a lancé le projet Linky en 2007 afin d'équiper 35 millions de clients d'ici 2021 de compteurs intelligents. Le compteur dit intelligent est un ensemble de capteurs qui permettent de fournir en temps réel la consommation énergétique d'une zone définie et permet en plus des actions de gestion en temps réel sur la consommation du foyer. L'installation du compteur Linky dans les foyers aurait des avantages pour tous les acteurs du réseau selon ce dernier. D'une part, Linky réduirait les coûts de gestion pour les gestionnaires de réseaux. D'autre part, ces compteurs réduiraient les fraudes et les réclamations auprès des fournisseurs, et autoriseraient une diversification des offres proposées aux clients grâce à la richesse d'informations supplémentaires. D'un autre côté, pour les producteurs, un tel équipement rendrait possible une meilleure gestion des pics de consommation et une simplification de l'installation d'énergies renouvelables. Enfin, pour les clients, les factures seront établies directement d'après leur consommation réelle.

La notion de réseau plus efficace a pris une dimension planétaire et l'expression Smart Grids recouvre des dimensions différentes : certains y verront une solution numérique en aval compteur et destinée majoritairement aux clients résidentiels alors que d'autres considèrent qu'il s'agit d'une vision globale, transcendant la structure actuelle du marché énergétique pour générer des bénéfices économiques, environnementaux et sociétaux pour tous [25, 45], voir le modèle proposé par Momoh [44, 45] à la Figure 1.3.2.



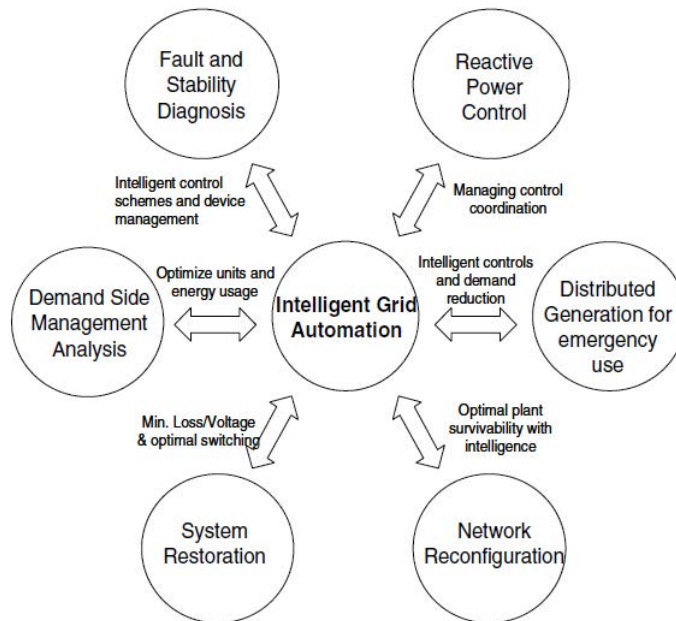


Figure 1.3.2 – Fonctions intelligentes du Smart Grid.

## 1.4 Le concept de Smart Grid

Étant donné les facteurs techniques du système électrique, un niveau de coordination très élevé est exigé pour bien exploiter le système. Historiquement, la forme organisationnelle la plus adoptée était une entreprise verticalement intégrée, qui veillait à minimiser les coûts de production dans le respect des contraintes du système. Les caractéristiques de la fonction de distribution de l'électricité et la complexité de la coordination de la production et la distribution rendait difficile l'éventualité d'une déréglementation du système électrique. Jusqu'à nos jours, dans la majorité des pays, tous les maillons du système électrique demeurent gérés par des monopoles naturels, sauf la fonction de production.

### 1.4.1 Un système de systèmes

Les problèmes des réseaux électriques sont connus et des groupes de travail sont formés de part et d'autres afin de trouver des solutions efficaces et compétitifs. Parmi les différentes études, les éléments suivant sont souvent cités en tant que Smart Grid ou intégrant le Smart Grid [26] :

- Génération distribuée / Microgrids : une optimisation centralisée est très coûteuse en temps et en mémoire, l'optimisation doit se faire à tout niveau. Les microgrids permettent de passer d'une interface centralisée en une interface distribuée. Les bénéfices en temps et en mémoire sont considérables, tout en garantissant une

optimalité de la distribution de l'énergie.

- Conception d'appareil intelligent (domotique) : la domotique permet de mieux connaître les réels besoins des consommateurs tout en optimisant la consommation locale et globale. Les appareils intelligents sont un élément essentiel de la résolution du problème de l'offre et la demande
- Dispositif de stockage de l'énergie : le stockage de l'énergie couplé à l'optimisation de l'énergie de bout en bout régule la consommation et efface les pics.
- Réduction des pertes du réseau T&D par automatisation de la distribution : la limitation des pertes de surproduction et de transport garantit une meilleure qualité de service de distribution.
- Contrôle intelligent du prix de consommation : le réseau devenant intelligent, il faut que le prix de consommation puisse aussi changer afin de suivre les nouveaux comportements de consommation.

La mise en place de ces nouvelles technologies pose de nombreux défis techniques. Afin de parvenir à les intégrer, le Smart Grid doit posséder un système de communication bidirectionnel (Figure 1.4.1), un environnement "plug-en-play", i.e. que le branchement d'un appareil au réseau ne doit pas requérir l'installation de nouveaux algorithmes ni de nouvelles méthodes de gestion locale. Les composants du réseau doivent savoir communiquer tout en garantissant la sécurisation des données transitant. Les appareils possèdent leurs propres capteurs et algorithmes dans le but de fournir un diagnostic en temps réel de leur état. Ainsi, les données deviennent des informations pouvant être communiquées.

L'intégration de toutes ces nouvelles technologies posent à la fois des problèmes au niveau technique mais aussi par rapport aux méthodes de gestion actuelles. En effet, les méthodes de résolution classique, basées sur des schémas prévisionnels et des capteurs ne suffisent pas à effectuer une gestion intelligente en temps réel. Une part importante d'automatisation reste à réaliser au niveau des réseaux de distribution pour permettre une interaction bidirectionnelle avec les nouveaux consommateurs énergétiques incorporant de plus en plus de points de micro-production.

En plus de ces améliorations techniques, le réseau doit posséder de nombreuses caractéristiques afin de garantir la production, la distribution et le transport de l'énergie [25, 26] :

1. Self-Healing : détection automatique du matériel potentiellement défectueux avant qu'il ne tombe en panne; et reconfiguration du système d'approvisionnement pour fournir tous les clients sans pénalité.
2. Flexibilité : interconnexion rapide et sûre de la production distribuée et de stockage d'énergie en tout point à tout moment. La flexibilité inclut aussi la capacité du réseau à intégrer de nouvelles technologies.
3. Prédicibilité : l'utilisation des statistiques, l'apprentissage machine, les algorithmes adaptatifs, et des modèles prédictifs (par exemple pour les projections météorologiques) fournissent les prochains événements les plus probables et reconfigurent le système avant que les événements ne se produisent.
4. Interactivité : l'information appropriée doit être fournie en temps réel de manière transparente en ce qui concerne l'état du système. Le système de communication

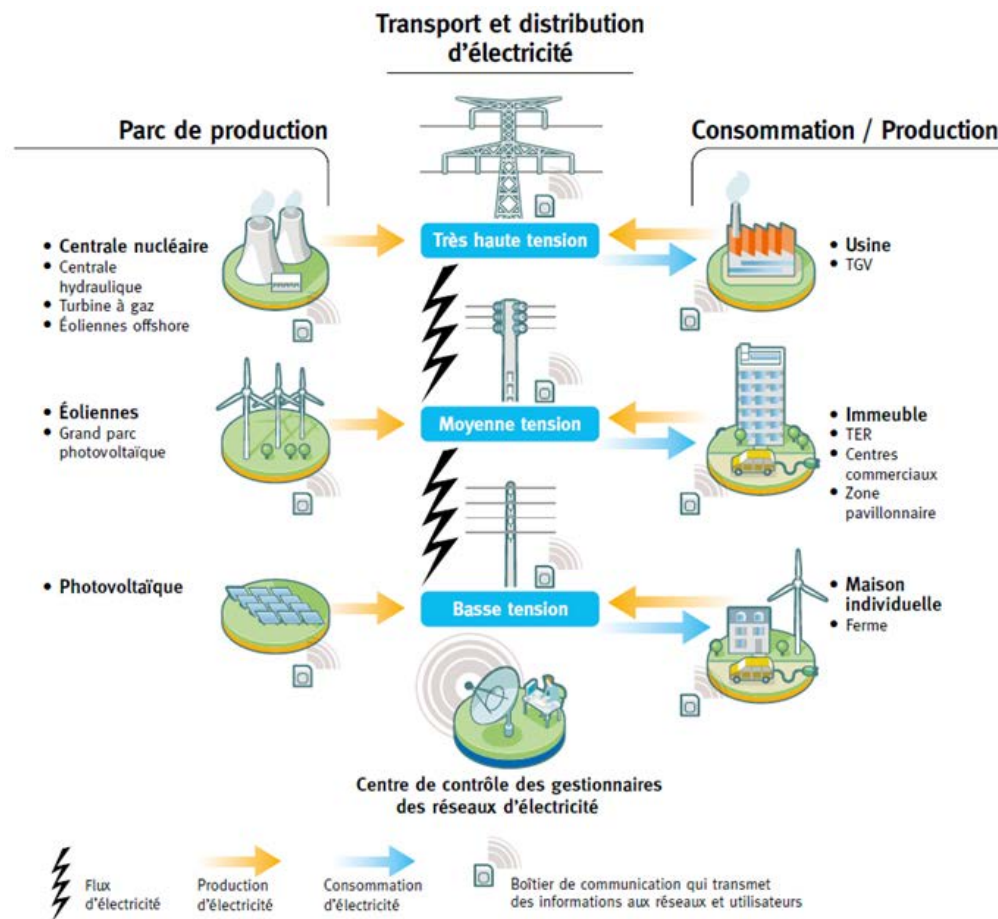


Figure 1.4.1 – Gestion bidirectionnelle de l'énergie (source CRE).

entre les différents acteurs du réseau doit favoriser les échanges d'informations en temps réel dans l'objectif de satisfaire les différentes méthodes de résolution.

5. Optimalité : les opérateurs du réseau et les clients coopèrent pour permettre à tous les participants du système énergétiques d'agir plus efficacement et économiquement. Les méthodes de résolution doivent garantir l'optimalité du résultat, que l'objectif soit économique ou énergétique.
6. Sécurité : les communications bidirectionnelles doivent être protégées et cryptées pour éviter toute manipulation externe des données.

Au niveau national, où des dispositifs intelligents et les équipements seront utilisés, des technologies intelligentes pour la surveillance, la mesure, la communication avec les autres échelles du Smart Grid et la gestion de l'énergie doivent être standardisées. L'élaboration de normes compatibles avec toutes sortes de technologies ou de pays doivent être élaborées pour une interopérabilité, une coordination et une coopérativité entre les appareils et les réseaux électriques.

### 1.4.2 Modèles de Smart Grid

Afin de contrôler de manière autonome le Smart Grid, il sera nécessaire de gérer de façon optimale la transmission, la distribution, la consommation et la communication. Mathématiciens, électroniciens, informaticiens et bien d'autres spécialistes offrent déjà de nombreux modèles de Smart Grid.

La majorité des études sur les Smart Grids utilise une méthode d'analyse cartésienne. Le système est divisé en modules: optimisation, structure du réseau, technologies de communication et sécurité [18]; et en éléments ou agents : utilisateurs, énergie, contrôleurs et données [50]. Une fonction-objectif globale est définie. Les simulations ont donc pour objectif d'optimiser la fonction-objectif globale, cette dernière variant d'un modèle à l'autre. Le Smart Grid est parfois assimilé à un problème de flot, ou à une gestion résidentielle, ou à une structure de marché bidirectionnelle. Mais il s'agit en général d'une vision réduite du Smart Grid, ou de la promotion d'une nouvelle technologie. Ces modèles reconnaissent leur propre faiblesse et la difficulté de modéliser tous les aspects d'un Smart Grid [43].

Ces modèles cartésiens deviennent très gourmands en mémoire sur des simulations à grande échelle. De plus, il n'analyse pas l'impact de leur modèle sur les acteurs, i.e. sur le comportement de chaque utilisateur. Bien que ces travaux offrent une grande diversité de modèles et présentent des résultats de gestion prometteurs, il n'est pas possible d'intégrer autant de nouvelles technologies fonctionnant sur des standards différents au sein d'un seul Smart Grid à très grande échelle.

Les modèles de Smart Grids présentent deux lacunes : des modèles trop spécifiques et complexes pour une utilisation à grande échelle, et des analyses cartésienne présentant une modélisation en vue top-down. Par la suite, nous présenterons diverses études regroupées par axe de recherche.

#### 1.4.2.1 Étude de la structure du réseau

Ce n'est que récemment que les chercheurs ont commencé à adopter des approches réseaux complexes pour comprendre les vulnérabilités des systèmes d'alimentation énergétique [56], et d'intégrer l'information structurelle du réseau dans la détection et l'atténuation des échecs [35, 46].

Pour élucider la structure électrique, Hines et al. [29] propose une nouvelle méthode pour représenter la structure électrique comme un graphe pondéré. Cette représentation analogue est basée sur la distance électrique plutôt que les connexions topologiques géographiques.

La structure d'un graphe est primordiale pour étudier le comportement d'un réseau complexe. Le réseau électrique reçoit une grande attention dans la littérature sur la science des réseaux complexes compte tenu de sa taille, sa complexité et l'envergure des économies possibles. Watts et Strogatz [59] ont mesuré la longueur caractéristique des chemins et de clustering dans les réseaux électriques, et ont trouvé des similitudes avec les réseaux petit-mondes. De nombreux autres rapports rapprochent des caractéristiques avec les réseaux à invariances d'échelle [11]. Ces études étant effectuées sur différents critères dans différents pays et régions, il n'est pas étonnant de voir tant de variance dans les résultats. Et même sur un même réseau il est possible d'obtenir des résultats différents [2, 11].

#### 1.4.2.2 Étude de la résilience du réseau

Ces dernières années, de nombreuses coupures de courant aux États-Unis et en Europe ont attiré l'attention sur les problèmes de sécurité dans les systèmes électriques. Quand une ligne d'alimentation tombe en panne, le courant électrique est déplacé vers les lignes voisines, qui, dans la plupart des cas, sont capables de gérer la charge supplémentaire. Il peut arriver que certaines lignes soient surchargées, tombent en pannes et doivent redistribuer leur charge chez leurs voisins. Au final, une cascade d'échec a des conséquences sur l'ensemble du système électrique.

En particulier, Albert [2] a étudié la capacité Nord-Américaine du réseau électrique pour résister aux cascades d'échecs. Les résultats indiquent que si 4% des nœuds possédant une très haute charge sont perturbés, alors le système global perd 60% de sa performance.

Nous remarquons que la distance géodésique (le chemin le plus court, ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs), utilisé dans la métrique de réseaux complexes, peut être généralisé pour tenir compte de la capacité de débit entre les nœuds. Basé sur ce nouveau concept, Arianos et al. [3] proposent une mesure appelée net-ability pour évaluer la performance et la résilience des réseaux électriques lors d'une coupure de ligne. Le net-ability est défini comme une mesure de performance du réseau dans les conditions normales de fonctionnement. Cette approche topologique du réseau électrique permet de mieux déterminer les zones fortement vulnérables, et donc de connaître les zones à éviter.

#### 1.4.2.3 Centrale virtuelle ou microgrid

La production décentralisée se développe ainsi que les fonctions d'automatisation (réglages de la tension et de la puissance, reconfiguration après défaut, reconfiguration en régime normal). Tous ces éléments sont agrégés à travers une centrale virtuelle locale, aussi nommé microgrid ou écoquartier dans la littérature.

La création de centrales virtuelles permet de s'affranchir en temps réel de l'opérateur centrale grâce à la combinaison de marchés locaux de l'électricité et de couples matériels/logiciels pour équilibrer, en temps réel, demande et production d'électricité. Elles représentent une forme de coopérative associant des producteurs et mettant en commun les différentes sources d'énergie disponibles.

La centrale virtuelle reçoit en temps réel des informations sur le taux d'utilisation des sources d'énergies disponibles, la demande instantanée en énergie, l'état du système de distribution, le calcul du coût de production de chaque source d'énergie, des données météorologiques. En fonction de ces informations, elle détermine le coût optimal de la production électrique et les priorités d'utilisation de cette production.

Il peut également fournir des prévisions à court terme et aider le fournisseur d'électricité et le gestionnaire de réseau à se préparer aux pointes de consommation. La coordination des flux d'électricité sur les réseaux locaux et inter-régionaux permet également une diminution des pertes sur les réseaux électriques dues aux phénomènes de congestion du réseau.

#### 1.4.2.4 Stockage et gestion locale de l'énergie

Alors qu'historiquement seules les centrales de production conventionnelles offraient l'énergie, la pénétration croissante d'énergies intermittentes nécessite l'interfaçage de nouvelles ressources de production, de stockage et de clients consommateurs prêts à mieux synchroniser leur demande en énergie. La migration des réseaux vers les réseaux intelligents nécessite donc une refonte significative de ces systèmes d'information temps réel avec de nouveaux enjeux liés à l'intégration de très grands volumes de données – ces données devront potentiellement être issues de chaque consommateur - et de nouvelles technologies de visualisation en support à l'aide à la décision.

Avec l'arrivée des compteurs intelligents qui peuvent surveiller et contrôler les appareils de la maison, il est maintenant possible d'envisager que les logiciels intégrés seront en mesure d'optimiser l'utilisation et le profil de stockage de la maison en utilisant les informations provenant de diverses sources.

Le stockage de l'énergie est l'un des piliers novateur de la vision des Smart Grid qui vise à soutenir l'approvisionnement énergétique durable [16]. De plus, le stockage peut être utilisé pour compenser la variabilité de la production d'électricité des énergies renouvelables rendant ainsi l'intégration de la production des énergies renouvelables locales viable [40]. Le stockage de l'énergie prend en compte les véhicules électriques mais aussi les batteries des bâtiments.

Selon un rapport du U.S. Department of Energy de 2008 [14], 74% de la consommation d'électricité nationale américaine arrivent dans des bâtiments, ce résultat varie peut en

fonction du pays. Il est donc essentiel de pouvoir optimiser leur consommation en temps réel. Il existe deux approches pour la gestion de la consommation de l'énergie dans les bâtiments : la réduction de la consommation et le décalage de consommation.

#### 1.4.2.5 Prix de consommation dynamique

Une approche classique pour réguler la consommation est de fixer un prix fort durant une période de temps et un prix faible le reste du temps. Depuis plus de 75 ans, la planification de l'électricité a été basée sur la satisfaction d'une demande de pointe. Les capacités de génération fossiles sont utilisées afin de répondre aux pics de demande occasionnels. Cette méthode n'a d'ailleurs pas porté ses fruits et le problème des pics de consommation est toujours d'actualité. Les performances mesurées à partir d'expériences limitées en Californie confirment que les consommateurs peuvent réduire la demande en réponse à divers stimuli dynamiques [10].

La dynamique des prix se base sur des prix associés à des estimations d'approvisionnement, de générations d'énergie combinées à un examen des conditions de fonctionnement du système (pics de consommation, croissance ou décroissance légère). Néanmoins, les résultats sont tout aussi aléatoires que les méthodes de prix classique sans utilisation de la domotique et d'un compteur intelligent. La gestion optimisée d'un système électrique tend vers une régularisation de la consommation donc à un prix constant moyennant quelques variations ponctuelles.

Mohsenian [42] montre qu'une analyse de jeu comportant un mécanisme tarifaire peut fournir aux abonnés les motivations de coopérer pour non seulement améliorer le système de l'exécution globale, mais aussi pour payer moins individuellement. Autrement dit, un arrangement tarifaire approprié permet d'obtenir un équilibre parmi des consommateurs partageant une source d'énergie commune de façon rapide et optimal.

### 1.5 Système complexe

Un Smart Grid possède de nombreuses entités en interaction, avec des objectifs parfois divergents (producteurs, consommateurs) et des contraintes propre à leur localisation ou leur nature. Cette particularité est propre aux systèmes complexes. Avant de pouvoir étudier le fonctionnement et les dynamiques du Smart Grid, nous devons définir et comprendre les systèmes complexes.

Selon le New England Complex Systems Institute, les systèmes complexes sont un nouveau domaine de la science étudiant la façon dont les parties d'un système donnent lieu à un comportement collectif (l'émergence); et comment le système interagit avec son environnement (l'auto-organisation), sans contrôleur central. Un système complexe s'adapte à des pressions externes ou internes pour maintenir ses fonctionnalités. Il est important de bien distinguer l'émergence et l'auto-organisation. L'émergence est définie comme l'évolution (ajout, suppression, modification) d'une nouvelle propriété interne sous l'effet des contraintes internes et externe. L'auto-organisation désigne la dynamique du système dans le but de maintenir ses fonctionnalités.

Une caractéristique principale des systèmes complexes est l'entropie : le système est plus complexe que la somme de ses sous-systèmes. Le comportement collectif est donc difficile de prévoir à partir de la connaissance du comportement local. De plus, chaque activité organisée montre une opposition entre deux exigences fondamentales, la répartition des ressources dans les différentes tâches à accomplir et la coordination de ces tâches pour accomplir la mission. Il est donc difficile de trouver un système d'optimisation mathématique tenant compte de toutes les contraintes [36]. Par ailleurs, la complexité de sa résolution ne permet pas un usage en temps réel.

Des exemples de ces systèmes sont les réseaux de gènes qui dirigent les processus de développement, les réseaux immunitaires ou les réseaux de neurones. Les colonies d'insectes sociaux, les réseaux sociaux, de transport, les services publics ou économiques correspondent aussi des systèmes complexes.

### 1.5.1 Un système dynamique chaotique

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction. Trois sortes de systèmes dynamiques sont différenciées : les systèmes aléatoires, les systèmes déterministes et les systèmes chaotiques. Les systèmes aléatoires évoluent comme leur nom l'indique au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régit, sans qu'aucune prévision exacte ne soit possible dans le temps. Les systèmes déterministes sont des systèmes régis par des lois mathématiques bien connues, il est possible de prévoir exactement l'évolution de ces systèmes dans le temps. Les systèmes chaotiques, quant à eux, ont un comportement très complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure difficilement définissable sur laquelle ils semblent errer au hasard, mais sans jamais la quitter ou tendant à la retrouver.

L'espace de phases permet de suivre l'évolution d'un système physique dans le temps. Pour ce faire, on attribue à un point dans un repère les caractéristiques du système à un instant donné. Le point aura donc autant de coordonnées qu'il y a de paramètres dans le système étudié. Lorsque le temps passe, le point change de coordonnées, donc de position dans le repère, et décrit généralement une courbe, appelée orbite. Par exemple, dans le cas d'un pendule, ce dernier est caractérisé par sa position et sa vitesse, cette dernière peut être influencée par des frottements, voir Figure 1.5.1. L'espace des phases offre une observation plus facile des changements d'un système.

Il existe des points possédant une propriété d'attracteur : les points fixes et les cycles-limites, un cycle-limite étant une orbite attirant toutes les orbites de son voisinage. A long terme, un système tend nécessairement vers son attracteur. Les attracteurs étranges, qui caractérisent les systèmes chaotiques, semblent inclure à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires, ce qui rend impossible toute prévision à long terme.

Les systèmes peuvent comprendre énormément de variables. Ainsi, l'activité du cerveau semble exiger un espace des phases de dimension infinie. Cet espace des phases, de dimension infinie, paraît alors impossible à manipuler. Il est donc difficile de décrire d'un point de vue macroscopique le comportement microscopique, alors que les deux sont liés. Afin de mieux comprendre l'évolution du système, il faut connaître ses sous-



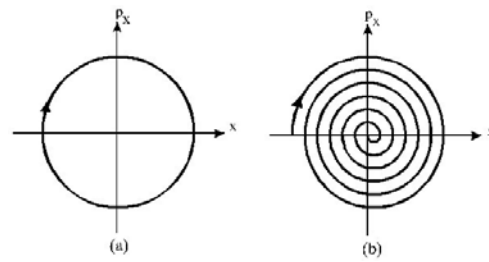


Figure 1.5.1 – Espace de phases d’un pendule sans et avec frottement.

composantes présentant des comportements autonomes et modéliser le comportement tout en tenant compte des interactions avec les autres sous-composantes.

### 1.5.2 Théories liées aux systèmes complexes

En plus des propriétés d’un système dynamique, l’étude des systèmes complexes est liée à de nombreuses autres théories, voir Figure 1.5.2. Le descriptif suivant n’est pas exhaustif mais a pour vocation de montrer l’étendue des théories usuelles dans la modélisation d’un système complexe.

Dynamique non-linéaire ou dynamique des groupes (Figure 1.5.3) : Un groupe est composé d’au moins deux individus liés par une relation. À cause de cette interaction et de l’influence induite, un groupe développe des processus dynamiques les différenciant d’une configuration aléatoire. La dynamique des groupes étudient les cycles comportementaux, leur évolution et les états stables et non stables.

Théorie des jeux : La théorie des jeux est un champ des mathématiques qui a pour objet d’établir et d’étudier les principes et les règles mathématiques pouvant intervenir dans l’analyse des différents types de comportement et des issues possibles lors d’une interaction stratégique entre plusieurs preneurs de décisions. Dans un grand nombre de problèmes décisionnels, au moins les deux premiers des aspects suivants sont présents : il y a au moins deux preneurs de décision ; il y a une interaction entre les décisions dans le sens où l’issue finale pour un des preneurs de décision dépend non seulement de l’action choisie mais aussi des actions choisies par d’autres décideurs ; il y a un ou plusieurs éléments d’incertitude. Un des buts de la théorie des jeux est d’abord de créer des modèles mathématiques. Ces modèles essaient de synthétiser tous les éléments essentiels pour décrire l’interaction, puis d’introduire des concepts de solution pour décrire les issues possibles d’un jeu, et d’appliquer ces outils pour mieux comprendre les phénomènes sociaux mais aussi pour prédire les conséquences d’une interaction stratégique.

Comportement collectif (Figure 1.5.4) : Le comportement collectif se réfère à une action, un processus ou un événement qui émerge spontanément chez un groupe. Des exemples de ce phénomène sont connus sous le nom d’hystérie de masse, d’émeutes, et des modes. Par exemple, une colonie d’oiseaux se déplacent à l’unisson, mais il n’y a pas de leader incontesté ou contrôleur global. La question est de savoir comment les interactions de l’oiseau s’enchainent pour produire le mouvement d’ensemble. Des

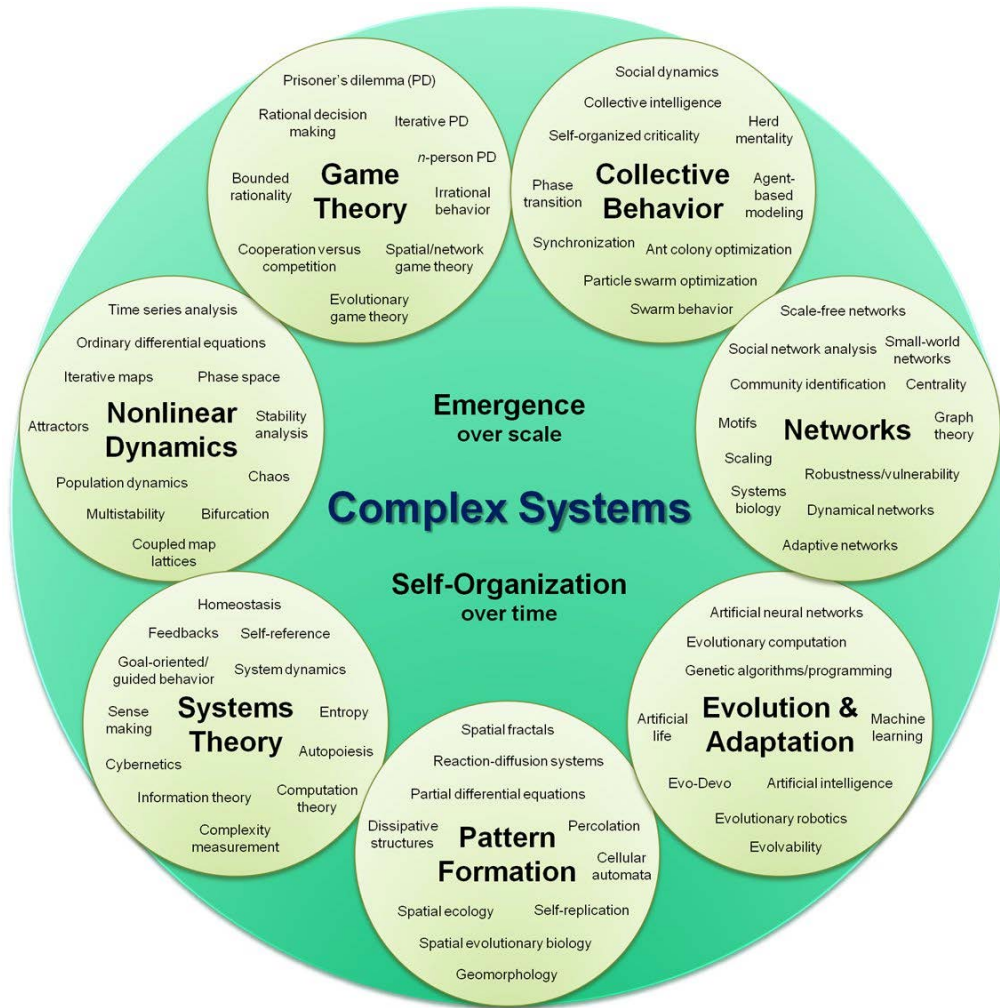


Figure 1.5.2 – Théories liées aux systèmes complexes.

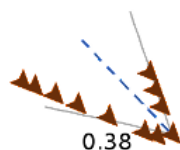


FIGURE 1.5.3 – Dynamique des groupes : vol d’oiseau à partir de trois règles élémentaires individuelles.

questions similaires se posent lorsque l’on regarde les colonies de fourmis et d’abeilles, les interactions cellulaires, et l’économie humaine.

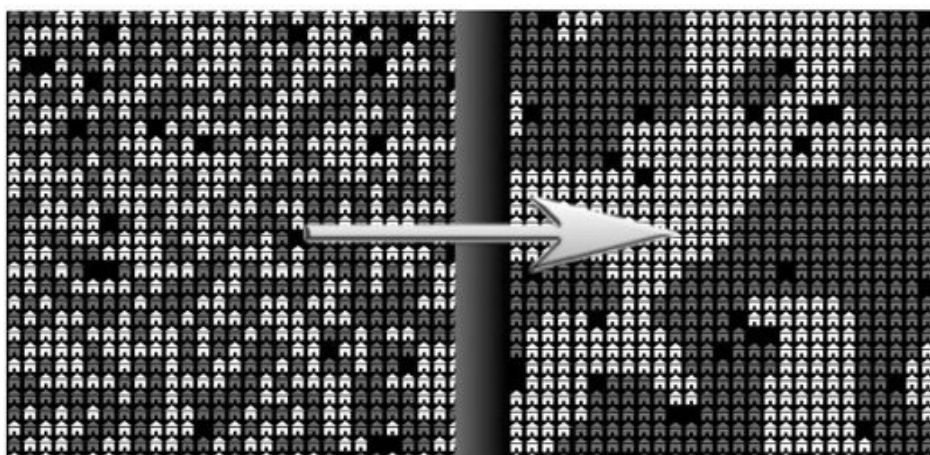


FIGURE 1.5.4 – Comportement collectif : Phénomène de ségrégation via le logiciel Net Logo.

Théorie des réseaux : Dans différents domaines techniques (informatique, télécommunications, énergie, voirie, transport de l’eau, etc.), on appelle réseau un ensemble de nœuds reliés entre eux par des liens afin d’échanger des informations, de partager des ressources, de transporter de la matière ou de l’énergie. Les nœuds peuvent avoir des fonctions plus au moins complexes de distribution, de concentration, d’enrichissement, tandis que les canaux assurent une fonction de transport. La théorie des réseaux classifie ces derniers selon leur configuration tel que petit-monde ou à invariance d’échelle, mais aussi la qualification des nœuds (cluster, feuille) ou des états relatif au bon fonctionnement du réseau (résilience, communication). L’étude des particularités du réseau offre les paramètres de base à tous les éléments du réseau, entrant en compte dans leur futur comportement.

Évolution et adaptation : En biologie, l’adaptation est définie comme étant la modification d’un caractère anatomique, d’un processus physiologique ou d’un trait comportemental dans une population d’individus sous l’effet de la sélection naturelle. De manière

générale, l'adaptation est la transformation d'une entité conduisant à plus d'adéquation avec des variables externes, environnementales. Un système doit donc posséder des capteurs permettant d'analyser, de comprendre et de prendre une décision. L'évolution renvoie aussi aux notions d'apprentissage, ce qui signifie que le système peut modifier ses mécanismes internes dans le but de mieux réagir aux contraintes. L'évolution et l'adaptation est un phénomène universel puisque tout système cherche à minimiser ses pertes, que ce soit énergétique, monétaire, ou autre. De nombreux algorithmes d'optimisation sont basés sur ce processus, tel que l'algorithme génétique qui reproduit le système de mutation et de sélection des gènes donnant les meilleurs résultats.

*Formation de schémas* : Tout élément organisé dépend de schémas mathématiques. Que ce soit dans le vivant ou le minéral, l'informatique ou la physique, presque tous les systèmes possèdent des schémas structurels caractéristiques. Les schémas dépendent de propriétés spatiales. Ces dernières sont généralement définies par les statistiques et la topologie. L'analyse de l'évolution des schémas mathématiques est essentielle dans la prédiction de l'évolution du système.

### 1.5.3 Défi de l'émergence

Un système complexe est composé d'entités hétérogènes en interaction mutuelle telles que des agents ou des procédés. Le système présente une auto-organisation et une émergence résultant de son adaptation à des pressions internes et externes afin de maintenir ses fonctionnalités. En raison de toutes ses caractéristiques ainsi que de l'entropie, le comportement et l'évolution d'un système complexe sont difficilement prévisibles sans l'aide de simulation.

Il est difficile voire impossible de trouver une fonction objective résolvant le problème dans sa globalité. Le nombre de variables impliquées peut aller jusqu'à des dizaines de milliers d'entités [36]. L'optimisation d'un système complexe s'avère donc très couteuse en mémoire et en temps. Par ailleurs, l'étude de ces systèmes offre une vision plus fine des réseaux sociaux, biologiques, physiques ou chimiques.

De nombreuses études se penchent sur cette question d'optimisation. Grefenstette [24] a déterminé deux axes majeurs. En premier lieu, une classe d'algorithmes d'optimisation appropriée pour les problèmes internes du système doit être choisie. Deuxièmement, les paramètres divers de l'algorithme d'optimisation doivent être accordés aux diverses contraintes internes et externes du système. Cette analyse fournit une première approche de la méthodologie systémique. Néanmoins, nous sommes souvent confrontés à des problèmes d'optimisation multicritères, dépendant de la granularité du système, et de la situation locale dans lequel nous nous trouvons.

Les études menés par Barabasi [4], Watt [58] ainsi que la conférence interdisciplinaire des Systèmes Autonomes Distribués [55] soulèvent quatre principes généraux d'informatique adaptative dans les systèmes décentralisés, plus généralement dans les systèmes complexes :

1. L'information globale est codée sous forme de statistiques et de schémas dynamiques dans les composants du système.

2. Le hasard et les probabilités sont essentiels.
3. Le système effectue une recherche parallèle de possibilités.
4. Le système présente une interaction continue en bottom-up et top-down [41].

Ce n'est que récemment que les chercheurs ont commencé à adopter des approches systèmes complexes pour comprendre les vulnérabilités des systèmes d'alimentation énergétique [56], et d'intégrer l'information structurelle du réseau dans la détection et l'atténuation des échecs [35, 46].

## Conclusion

De nombreux systèmes artificiels et naturels possèdent les caractéristiques des systèmes complexes. Les méthodes classiques d'étude, basé sur une analyse cartésienne, échouent à comprendre ses systèmes. Le système est composés de parties hétérogènes, définir une fonction globale s'avère donc impossible. De plus, le nombre de variables et de contraintes peuvent varier d'une modélisation à l'autre. Enfin, même si le système permet d'en extraire une fonction globale, la complexité de cette dernière est telle que les ordinateurs ne peuvent la résoudre en temps réel [36].

Les Smart Grids possèdent de nombreuses propriétés communes aux systèmes complexes telles que : l'hétérogénéité des éléments, l'impact des facteurs internes et externes sur la gestion du réseau, la nécessité d'outil de mesure et de contrôle afin de résoudre les problèmes, un comportement et une dynamique à tout échelle.

Nous devons analyser le Smart Grid afin d'en comprendre les mécanismes et les composants internes, de façon globale mais aussi pour chaque sous-composante homogène. Une fois les sous-composantes définies, nous devons mettre en plus des solutions de gestion afin d'optimiser les fonctions d'offre et de demande, et de limiter les pertes à tout niveau.



## Chapitre 2

# Analyse d'un système complexe

Les problèmes énergétiques et de pollution sont récurrents de nos sociétés du 21<sup>ème</sup> siècle. La grille évolue, mais sa structure, son optimisation et les nouvelles technologies mettent en péril son fonctionnement. Pour résoudre ces problèmes, la littérature fait référence à un système intelligent de réseau électrique, intégrant les comportements et les interactions de ses entités, une gestion et une optimisation à toute échelle : le Smart Grid. Ce dernier combine des technologies d'information et de communication dans le but de générer, de transporter, de distribuer et de consommer l'énergie d'une façon plus efficace. Les simulations de Smart Grid sont souvent réalisées dans le cadre d'intégration locale de nouvelles technologies, sans prendre en compte l'impact à une plus grande échelle ou un autre réseau.

L'étude cartésienne échoue à modéliser les systèmes complexes. Tenant compte de l'entropie de ces systèmes, il n'est pas possible de modéliser chaque partie à part ni de modéliser l'ensemble du système sans tenir compte de chaque partie indépendamment. Le Smart Grid possède les critères des systèmes complexes. Afin de proposer un modèle sans-contexte et adaptatif, nous devons comprendre la complexité dans chaque système à l'aide d'une analyse appropriée à l'étude des systèmes complexes.

Ce chapitre se décompose en trois parties. Dans un premier temps, nous devons comprendre comment étudier les systèmes complexes. Puis, nous appliquerons la méthode aux Smart Grids. Nous proposerons à la fin la structure général d'un Smart Grid, le squelette auquel nous pourrions ajouter divers modules dans l'objectif d'optimiser chaque partie du Smart Grid, ainsi que leurs interactions.



## 2.1 Analyse d'un système complexe

### 2.1.1 Analyse cartésienne et analyse systémique

Il existe deux types d'approche pour résoudre un problème. La méthode classique, enseignée au cours de notre scolarité, est l'analyse cartésienne aussi appelé cadre procédural ou top-down. Ce cadre fixe les étapes à respecter, leur enchainement ainsi que la finalité. René Descartes propose un outil structurant la démarche de recherche de la connaissance dans son "Discours de la méthode" en 1637. Les sciences modernes se basent sur la ligne de pensée suivante :

1. L'évidence : ne pas partir d'une conclusion, d'une croyance ou d'une connaissance.
2. La réduction : le problème est analysé, divisé, réduit en des problèmes connus.
3. L'exhaustivité : tous les détails du problème sont détaillés afin de n'omettre aucun élément du problème initial.
4. La causalité : conduire un raisonnement linéaire logique afin d'arriver à la solution finale.
5. L'objectivité : le processus a pour objectif d'obtenir les mêmes conclusions quel que soit l'observateur.

Bien que cette méthode vise à fournir une vision unique des problèmes, il existe souvent de nombreuses possibilités de comparaison et d'identification du problème. De plus, le problème est souvent biaisé par les connaissances, les références et les acquis de l'observateur.

Le développement de la biologie et de l'électronique (Von Bertalanffy et G. Wiener à la fin des années 1940) ont permis d'établir le deuxième type d'analyse : l'analyse systémique ou bottom-up. Le problème est étudié en mettant l'accent sur les relations entre les éléments. Le problème est un système d'organisation global de ses composantes. Il faut donc délimiter les frontières et définir les règles du système. L'analyse systémique se décompose ainsi :

1. Identifier les éléments : les éléments actifs, les éléments passifs, les caractéristiques, les comportements, les actions. C'est une représentation opérationnelle.
2. Simplifier : les composantes ne représentent qu'une partie des aspects du problème. Ses limites, sa composition, ses actions et ses interactions doivent être clairement définis.
3. Globaliser les composantes :
  - a) Finaliser la représentation en système, l'observateur doit définir à quoi va servir la représentation.
  - b) Finaliser le système, définir les projet(s) /objectif(s) principaux du système, dans cette représentation.
  - c) Définir qualitativement et quantitativement les entrées/sorties en relation avec le(s) environnement(s).

- d) Définir les activités, les modifications que subissent les flux entre leurs entrées et avant leurs sorties.
- e) Analyser la structure, l'organisation et les modes de transactions internes (transport, transfert, transformation).
- f) Formaliser/codifier les procédures d'évolution.

Cette méthode n'a pas pour objectif de fournir une réponse unique à un problème, mais un ersatz du problème pouvant servir de modèle pour la simulation de son processus et de ses comportements. L'analyse systémique repose sur l'analyse des détails pertinents dans l'action menée et avec les objectifs définis.

La grande majorité des études sur le Smart Grid emploie une méthode cartésienne d'analyse du système. Bien que les résultats soient satisfaisants, ces modélisations deviennent gourmandes en mémoire avec de grandes instances, et imposent des technologies sans pouvoir étudier leur impact à grande échelle ou dans un autre cadre. Nous sommes donc confrontés à deux lacunes : un modèle local non exhaustif et préétabli, et une analyse cartésienne non pertinente dans un modèle plus large.

### 2.1.2 Cas des systèmes complexes

La méthode proposée pour l'étude des systèmes complexes se base sur une approche systémique [1]. Dans un premier temps nous devons comprendre le système étudié. Une analyse globale et locale fournit les caractéristiques structurelles, les entités et les objectifs des différentes zones du système complexe. Par exemple, dans un écosystème, les prédateurs chassent des proies définies par une notion préférentielle. La structure est une hiérarchie, ou chaîne alimentaire ; l'objectif est de manger les entités de rang inférieur sur la chaîne alimentaire.

Suite à cette analyse, des sous-composantes sont définies. Une sous-composante possède une structure, des objectifs et des entités propres, bien que les quantités ou la position dans le système complexe soient variables. En tant que système à part, elles ont leur propre dynamique. Il est alors possible de résoudre une sous-composante en dehors du système global en tenant compte des données de sortie des autres sous-composantes. Dans l'exemple de la chaîne alimentaire, chaque type de population forme une sous-composante.

Chaque sous-composante est en interaction avec d'autres composantes du système, il faut alors prendre en compte les éléments d'entrée et de sortie de chaque méthode. Dans l'exemple cité précédemment, nous considérons que les loups sont des prédateurs, que ces derniers mangent des moutons et que les moutons mangent de l'herbe, l'herbe pousse en fonction de sa population. Nous cherchons à optimiser le système pour qu'il soit stable. Lorsque nous cherchons à optimiser la population des loups, nous prenons en compte indirectement de la population de moutons, et ainsi la population d'herbe. Il existe donc des critères ou contraintes globales externes ou internes permettant de fixer des objectifs communs à toutes les sous-composantes.

Les sous-composantes doivent échanger des informations afin de trouver un consensus entre les diverses optimisations. Par exemple, si nous cherchons à optimiser la population

des loups, il est important de trouver un équilibre entre les trois populations. Pour cela il faut gérer la croissance et les décès des loups, donc des moutons, donc de l'herbe et inversement. Il existe donc une relation bidirectionnelle entre les sous-composantes. Dans le cas ou non étudions qu'une seule sous-composante, il serait impossible de connaître l'évolution du système ou d'optimiser sur un réseau plus vaste. Si nous optimisons seulement la population de loups, alors il est fort probable que la quantité de départ amène à un résultat autre que celui désiré : les loups peuvent exterminer les moutons, puis mourront de faim. Il existe bien des schémas mettant en péril le système, c'est pourquoi les sous-composantes doivent posséder un système de rétroaction afin d'équilibrer le système global.

En résumé, nous analysons le système d'un point de vue global et local afin de déterminer des sous-composantes ; ces dernières possèdent un système de communication et leurs propres méthodes d'optimisation ; des critères globaux garantissent un équilibre du système, même en cas d'erreur ou de mutation d'une partie du système.

## 2.2 Anatomie d'un Smart Grid

Afin d'appliquer l'analyse système complexe aux Smart Grids, nous devons dans un premier temps en connaître sa structure, sa dynamique, ses acteurs et leurs objectifs.

### 2.2.1 Le réseau de l'énergie

#### 2.2.1.1 Structure du réseau

Une fois produite, l'électricité emprunte un réseau de lignes aériennes et souterraines que l'on peut comparer au réseau routier, avec ses autoroutes et ses voies nationales (lignes à très haute et haute tension du réseau de transport d'électricité RTE), ses voies secondaires (lignes moyenne et basse tension gérées par les réseaux de distribution) et ses échangeurs (postes électriques) comme le montre la figure 2.2.1. Il est destiné à transporter des quantités importantes d'énergie sur de longues distances. Il constitue l'ossature principale pour l'interconnexion des grands centres de production, disséminés en France et dans les autres pays européens.

Le courant produit est porté à une tension de 400 000 volts, des grandes quantités d'énergie sont transportées sur de longues distances avec le minimum de pertes d'électricité. Le réseau assure l'indispensable solidarité entre les régions et la sécurité d'alimentation de tous. Il est interconnecté aux réseaux des pays voisins. Il forme un vaste maillage, dont les nœuds, soit reçoivent l'énergie électrique des centrales, soit écoulent l'énergie vers les réseaux régionaux.

Les réseaux de distribution sont destinés à acheminer l'électricité à l'échelle locale, i.e. aux utilisateurs en moyenne tension, PME et PMI, et en basse tension, les clients du tertiaire, de la petite industrie et les clients domestiques. Ces tronçons sont assimilés aux routes départementales dans le réseau routier. L'électricité passe du réseau de transport aux réseaux de distribution grâce aux postes sources. Les postes sont les nœuds du réseau où aboutissent les lignes qui apportent l'énergie, et d'où partent celles qui irriguent les

régions. Dans un poste se trouvent des disjoncteurs ayant pour fonction de couper la ligne en cas de problème critique ; des sectionneurs, grâce auxquels il est possible de modifier le schéma d'exploitation du réseau ; et les transformateurs, qui assurent le transfert de l'énergie électrique entre lignes de tension différente. Les réseaux de distribution alimentent les particuliers, les petits commerçants, les collectivités locales et les petites et moyennes entreprises.

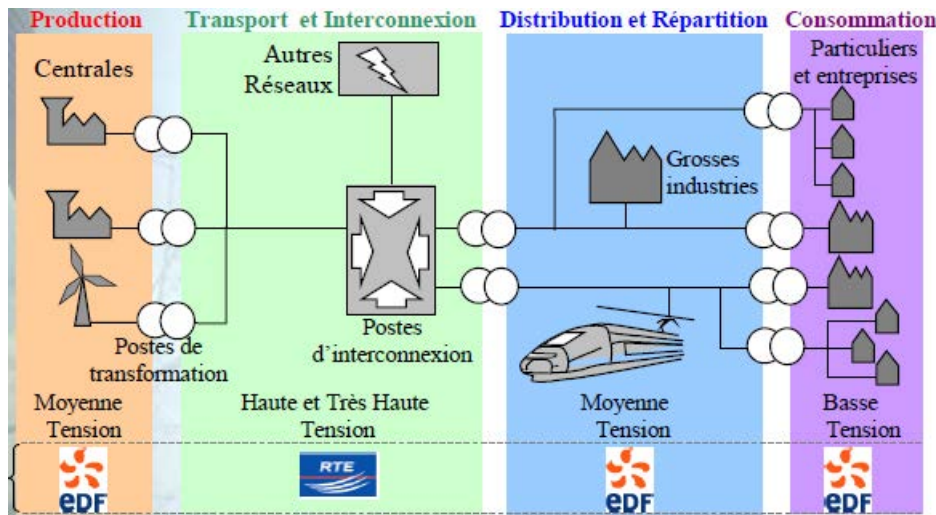


FIGURE 2.2.1 – Structure du réseau énergétique français (source ERDF).

### 2.2.1.2 Variables du réseau

Un réseau électrique possède de multiples niveaux de tension. Chaque niveau de tension est conçu pour une plage d'utilisation bien spécifique. Des tensions légèrement trop élevées conduisent à une usure prématurée du matériel, puis si elles sont trop élevées à un claquage de l'isolant. A contrario, des tensions trop basses par rapport à la plage spécifiée conduisent à un mauvais fonctionnement de beaucoup d'installations, que ce soit chez les consommateurs comme les moteurs, ou sur le réseau. De plus, des tensions basses sur les réseaux de transport d'électricité ont été la cause de grands incidents qui ont été responsables de la coupure de plusieurs millions de foyers (ex. du blackout grec le 12 juillet 2004 ou du 12 janvier 1987 en France). Bien que les plages d'utilisation des matériels spécifient une marge de 5 à 10 % par rapport à la tension nominale, les grands opérateurs de réseaux privilégient actuellement une exploitation plutôt en tension haute car cela limite les pertes joules dans le réseau.

L'intensité du courant sur les lignes est un paramètre particulièrement important à surveiller car elle peut entraîner la destruction de matériel, ou bien mettre en danger la sécurité des biens et des personnes. L'IMAP (Intensité Maximale Admissible en Permanence) est l'intensité maximale à laquelle un ouvrage peut être exploité sans limitation de durée. Afin de faciliter l'exploitation des réseaux électriques, certains ouvrages peuvent

être exploités à une intensité supérieure à l'IMAP mais pendant une durée limitée. Le problème créé par une intensité trop élevée est un échauffement par effet Joule important et donc des pertes énergétiques. Dans certains réseaux, l'IMAP est remplacé par une limite thermique de la ligne à ne pas dépasser.

L'intensité de court-circuit (abrégée  $I_{cc}$ ) est une grandeur théorique qui correspond au courant que l'on pourrait mesurer en un point du réseau si ce point était relié directement à la terre. Elle est égale au courant circulant dans un ouvrage lors d'un défaut triphasé franc à la terre, c'est-à-dire qui relie directement les 3 phases à la terre. L' $I_{cc}$  est fournie principalement par les groupes de production. Elle est élevée dans les nœuds du réseau que sont les postes électriques, sur le réseau 400 kV européen, les valeurs sont de l'ordre de 30 à 50 kA. L' $I_{cc}$  devient de plus en plus faible au fur et à mesure que les niveaux de tension décroissent et que l'on s'éloigne des postes électriques. Les matériels utilisés dans les postes électriques sont conçus pour résister à une valeur maximale d' $I_{cc}$  : au-delà, il y a un risque de casse de matériel en cas de court-circuit. Pour le consommateur, l' $I_{cc}$  correspond à l'intensité maximum que peut fournir le réseau : une  $I_{cc}$  suffisante est donc indispensable au démarrage des gros consommateurs électriques. De manière générale, une  $I_{cc}$  élevée maintient une bonne qualité de l'onde électrique fournie aux clients.

### 2.2.1.3 Répartition des flux

Bien que les flux soient souvent représentés par un échange unilatéral de l'énergie du producteur au consommateur, la manière dont se répartissent les flux physiques dans le réseau est tout autre. L'électricité obéit en effet à des lois physiques bien précises, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, qui font que les flux se répartissent principalement suivant les impédances des lignes composant le réseau.

Le phénomène des flux parallèles est fondamental dans les réseaux maillés, et plus le maillage et l'interdépendance des réseaux interconnectés seront forts, plus les flux parallèles seront importants comme le montre la Figure 2.2.2. Ceci explique entre autre pourquoi un ensemble maillé peut difficilement être géré par morceaux. Cependant il est possible de traiter le problème en partant de la solution finale vers la résolution du routage par les valeurs d'impédances des lignes. Pour cela il faut considérer que les lignes possèdent des limites basses et hautes de flux énergétique. Cela simplifie grandement le problème car il suffit de trouver un schéma de routage possible.

### 2.2.1.4 Stabilité du réseau

Les réseaux de transport ont pour but de transporter l'énergie des grands centres de production vers les régions consommatrices d'électricité. Des défauts imprévisibles surgissent très fréquemment, il se produit environ 10 000 court-circuits par an en France sur le réseau de transport (d'après RTE). Pour éviter l'effet domino dû aux reports de transits, il est nécessaire que le réseau soit localement robuste à au moins un ou deux coupures de ligne.

Pour  $N$  lignes en fonction et la perte de  $K$  grandes lignes, le système détermine si cet état  $N - K$  est dangereux pour sa stabilité. Les grandes puissances transitées

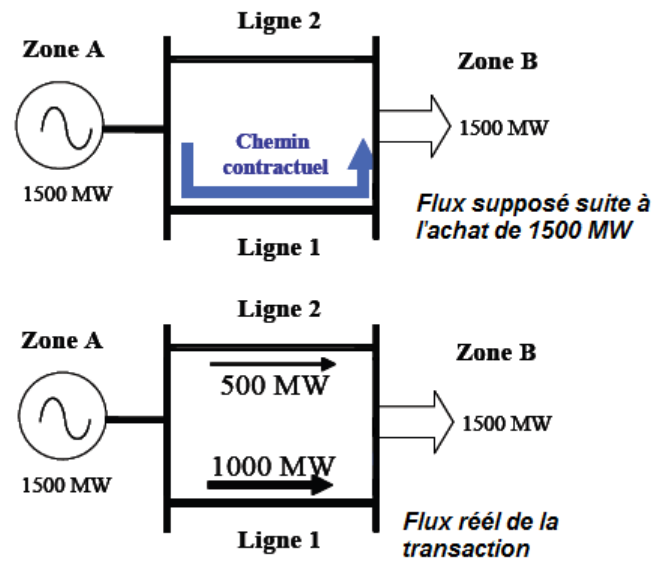


FIGURE 2.2.2 – Dispersion de l'électricité dans un réseau.

imposent des lignes électriques de forte capacité de transit, ainsi qu'une structure maillée. Les réseaux maillés garantissent une très bonne sécurité d'alimentation, car la perte de n'importe quel élément n'entraîne aucune coupure d'électricité si l'exploitant du réseau de transport respecte la règle dite du  $N - 1$  : possibilité de perdre n'importe quel élément du réseau sans conséquences inacceptables pour les consommateurs.

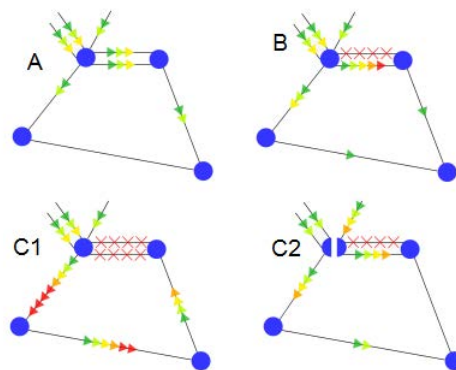


FIGURE 2.2.3 – Problème de congestion sur les lignes hautes tensions.

La figure 2.2.3 présente l'efficacité de la règle du  $N - 1$  dans le cas de congestion :

- A)** L'électricité se répartit sur les lignes électriques en fonction de la localisation de la production, de la consommation et des impédances des ouvrages (lignes et transformateurs) selon les lois de Kirchhoff.

- B)** Un incident s'est produit sur le réseau : une ligne est hors service. Du fait de la structure maillée, l'énergie s'est répartie sur les lignes restantes en fonction de leur impédance, tout en assurant la continuité de l'alimentation électrique. Par contre une ligne est en surcharge, il faut donc agir rapidement pour ramener son intensité à une valeur acceptable.
- C1)** Si aucune action n'est menée dans les délais suffisants, la ligne en surcharge va rompre à son tour. L'énergie va alors se répartir à nouveau pour alimenter les consommateurs. Avec de moins en moins de lignes électriques pour acheminer la même puissance, les surcharges sur les lignes restantes deviennent très importantes et risquent de rompre ces dernières. Un enchainement de ce type est appelé une cascade d'erreurs et est quasiment toujours impliqué dans les grands blackouts rencontrés au niveau mondial. Ceci illustre qu'à partir d'une situation de réseau a priori bénin, un événement peut rapidement avoir des conséquences non maîtrisables et de grande ampleur.
- C2)** Suite à l'échec de la première ligne électrique, plusieurs moyens sont à disposition des contrôleurs pour palier à cette surcharge. Ici, l'énergie est redistribuée dans les lignes adjacentes afin de limiter le report trop massif sur une seule ligne. D'autres solutions, plus contraignantes, auraient pu être adoptées pour lever la surcharge : augmentation rapide de production dans la zone problématique afin de diminuer les apports d'énergie par les lignes ou la coupure volontaire ciblée de consommation (on parle alors de délestage) afin de conserver l'alimentation d'un maximum de clients.

### 2.2.2 Aperçu global

Un réseau complexe présente différentes structures possédant leurs propres propriétés et entités [23]. L'étude du réseau français RTE ainsi que de la littérature sur les réseaux électriques américains et européens nous a permis de distinguer trois types de structures représentées dans la figure 2.2.4 :

1. Le réseau très haute tension : graphe 2-connexe ou  $N - 1$ , le retrait d'une arête n'altère pas la connexité du graphe
2. Le réseau moyenne tension, réseau de distribution : structure linéaire ou en boucle.
3. Le réseau de distribution, moyenne et basse tension : structure en arbre.

Il existe de nombreuses entités au sein d'un Smart Grid. Il existe plusieurs types de producteurs : centrales thermiques, centrales nucléaires, parcs de production par énergie renouvelable (solaire, éoliennes), centrales hydrauliques. Toutes ces entités ont la particularité de produire de l'énergie, et se situent principalement au niveau du réseau très haute tension aussi appelé réseau de transmission et distribution (T&D). Le Smart Grid possède des consommateurs, que ce soit résidentiel, industriel ou commercial ils ont tous besoin d'une certaine quantité d'énergie. En fonction de l'importance de consommation, il se situera soit au niveau du réseau basse tension soit au niveau moyenne tension. Dans les deux cas le regroupement des consommateurs au niveau de la sous-station distributrice, agrégateur, ce qui forme un microgrid, voir exemple de la figure 2.2.5.

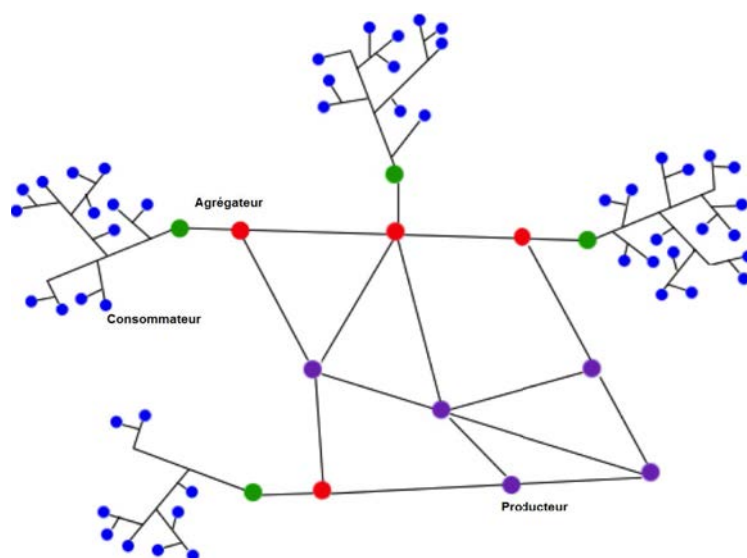


FIGURE 2.2.4 – Structure d'un réseau électrique.

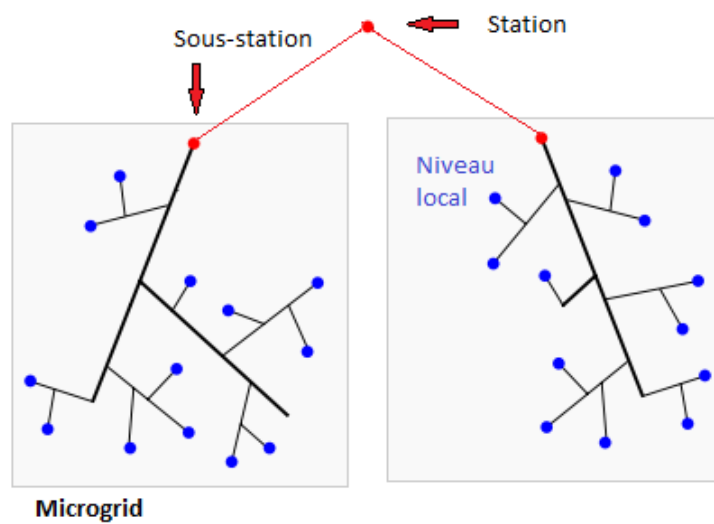


Figure 2.2.5 – Deux microgrids.



En regardant les évolutions récentes du marché de l'effacement outre-Atlantique, l'agrégation deviendra une prestation complémentaire, s'ajoutant à une palette de services énergétiques existants - l'agrégateur servant alors d'intermédiaire entre le système électrique et les consommateurs. Son rôle est d'optimiser le fonctionnement d'un ensemble aussi large que possible de bâtiments ou sites tertiaires et industriels du point de vue de leur demande et production énergétique, afin de les rendre acteurs de l'équilibre du système électrique.

## 2.3 Modélisation d'un Smart Grid

### 2.3.1 Définition des sous-composantes

Le réseau électrique est disposé sur trois niveaux structurels :

1. Des producteurs en réseau maillé.
2. Des postes intermédiaires suivis d'un réseau de type linéaire.
3. Des consommateurs en bout de chaîne.

Les transits énergétiques sur le réseau dépendent à chaque instant :

1. De l'ensemble de la consommation.
2. De l'ensemble de la production (internationale ou nationale).
3. De l'architecture du réseau.
4. Des flux contractuels soumis à des valeurs minimales et maximales sur les lignes.

Analysons les objectifs des entités du Smart Grid :

- Transport et distribution : éviter la congestion, satisfaire la demande de consommation.
- Production : équilibrer la production en fonction de la demande, prévoir la courbe de production.
- Consommation : réguler la consommation locale et globale.
- Contraintes globales : réguler l'offre et la demande, distribuer l'énergie.

Après corrélation des données, nous obtenons la schématisation de la figure 2.3.1. Le Smart Grid présente trois sous-composantes possédant une structure, une dynamique et un comportement distincts. Nous parlerons d'un Smart Grid en trois niveaux : le réseau T&D, le microgrid et le niveau local.

Le réseau de transmission et de distribution énergétique ou réseau T&D est une structure 2-connexe possédant des entités producteurs d'électricité de type centrale. Son rôle principal est d'acheminer l'énergie vers les pôles consommateurs. Il s'agit donc d'un routage, ou d'une recherche de flot maximum.

Le deuxième niveau fait le lien entre la consommation et la production énergétique, représenté par la deuxième couronne. Le microgrid est une vision plus large des consommateurs locaux, il s'agit d'une structure en arbre représentant un écoquartier délimité par la sous-station en amont. Le microgrid prend en charge la distribution de l'énergie. Il commande une certaine quantité d'énergie au niveau du réseau T&D pour les consommateurs locaux.

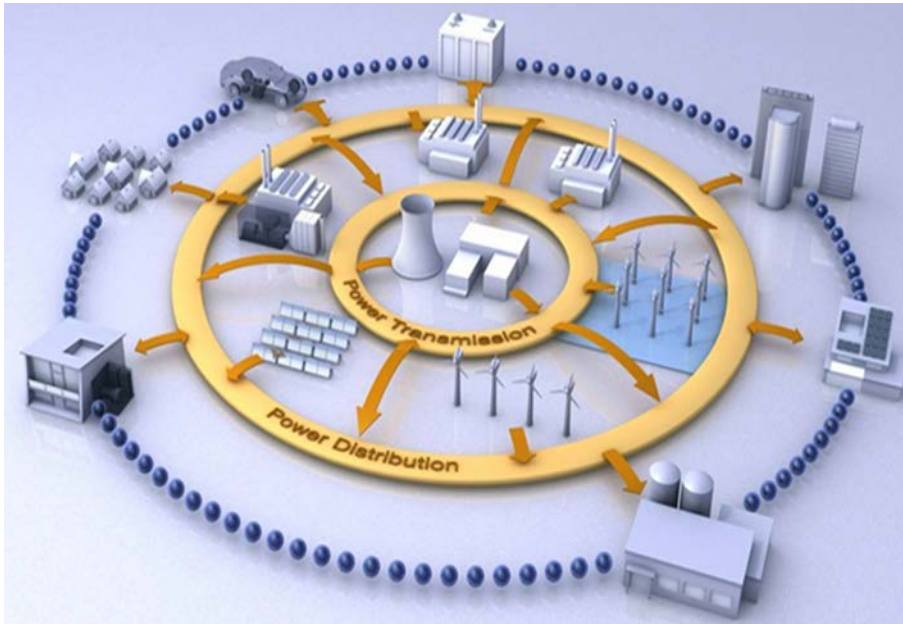


FIGURE 2.3.1 – Schématisation du réseau (source Siemens).

La couronne externe en pointillés représente le troisième niveau, les entités locales. Ces dernières sont les consommateurs reliés à une sous-station elle-même reliée au réseau de distribution de l'énergie. Ces structures isolées, représentant une résidence, une usine, etc., prennent en charge la consommation de l'énergie, i.e. la répartition de l'énergie parmi les appareils consommateurs sous sa responsabilité. D'une manière plus généraliste, un niveau local est défini par la zone sous contrôle d'un compteur intelligent ou autre dispositif de gestion de la domotique.

Afin de rendre le modèle proche d'un réseau réel, nous devons en plus des contraintes internes prendre en compte les contraintes externes. Ces dernières agissent directement ou indirectement sur ses différentes variables. Parmi les différentes contraintes externes nous pouvons citer :

- Environnement météorologique : l'ensoleillement, la température, le vent, etc. L'environnement météorologique sera considéré comme des variables sur les productions des énergies renouvelables ainsi que sur la consommation. Afin de simplifier ces contraintes, un effet de variation stochastique altère des schémas de production ou de consommation journaliers.
- Environnement socioéconomique : les consommateurs peuvent se différencier par leur type de consommation (consommateur, consommacteur) ainsi que ses horaires de pics de consommation (primaire, secondaire, tertiaire). De plus, les consommateurs peuvent ou non posséder divers équipements ou appareils intelligents. Tous les appareils doivent être gérés peu importe la configuration locale, i.e. que chaque bâtiment doit autoriser, reporter, annuler ou diminuer sa consommation dans le but de réguler la courbe de consommation. Pour cela, nous devons intégrer de

nouveaux paramètres tel que la priorité de fonctionnement.

### 2.3.2 Priorité de fonctionnement

Nous avons établi une première ébauche d'un modèle généraliste du futur réseau de distribution énergétique intelligent. Mais la caractéristique "smart" du réseau a besoin de nouvelles variables et de nouvelles contraintes afin de satisfaire les objectifs inhérent au fonctionnement du Smart Grid.

La domotique regroupe de nombreux appareils dans l'entretien (machine à laver, lave-vaisselles, etc), dans le confort (climatisation, chauffage) mais aussi dans le contrôle des machine-outils. Afin de contrôler la domotique, nous ajoutons une variable pour chaque appareil traduisant l'importance de ce dernier à consommer immédiatement. Par exemple, une climatisation dans un local habité lors d'une canicule a tout intérêt à fonctionner alors que le chauffage n'aura aucun intérêt.

La priorité de fonctionnement est une part fondamentale dans le lissage et la sécurité de la consommation d'énergie. Certains appareils gros consommateurs d'énergie n'ont pas d'obligation de fonctionner dès leur lancement. Si nous imposons une variable de priorité à chaque élément de l'échelle locale, il est alors possible de réguler la consommation. Une voiture électrique pourra ainsi être chargée durant la nuit, un ordinateur portable pourra désactiver momentanément sa consommation par ligne directe s'il est déjà plein, un lave-linge pourra retarder sa mise en route en cas de surconsommation. De nombreux appareils peuvent temporairement se mettre en veille ou le début de consommation peut être reporté. Certains appareils sont aussi capables d'arrêter de consommer durant leur fonctionnement (préemption). Environ 50% de la consommation des zones résidentielles peut être contrôlé sans réduire le confort des usagers [9].

Cette variable n'est pas prise en compte par tous les appareils. Les ordinateurs de bureau, les lumières, le réfrigérateur sont des éléments devant impérativement fonctionner. Ces appareils auront donc une valeur par défaut de 0, ayant la garanti d'être fourni en énergie. Les autres appareils auront une valeur basée sur le comportement de l'utilisateur et des statistiques d'utilisation.

Une fois qu'un appareil consomme, sa valeur de priorité est de 0. Par exemple, si un lave-linge de priorité 2 reçoit l'énergie requise pour fonctionner, sa priorité passe alors à 0 jusqu'à la fin de son cycle. Cela permet entre autre de mettre à jour les statistiques sur le long terme et ainsi de mieux déterminer les besoins futures à toutes échelles. Il est possible que certain appareil possède une priorité qui va croître ou décroître au cours du temps. Les maisons intelligentes disposant d'un thermostat sont capable de connaitre la température intérieur et donc d'augmenter au de diminuer la puissance des chauffages.

## **Conclusion**

Le Smart Grid possède trois niveaux distincts : le niveau local, le microgrid, et le réseau T&D. Le premier a pour objectif de gérer les consommateurs, à la fois par la domotique et une gestion intelligente, ainsi que les énergies renouvelables et toutes technologies connectées aux consommateurs. Le niveau du microgrid représente un écoquartier, un regroupement de niveau local rattaché à un même agrégateur. Le microgrid a une vision à la fois des possibilités de consommation mais aussi de la production disponible. Il doit trouver un consensus entre l'offre et la demande. Le réseau T&D gère quant à lui la distribution de l'énergie dans tout le réseau.

L'utilisation de la méthode d'analyse des systèmes complexes peut être utilisée sur d'autres cas difficilement résoluble. Par exemple, l'équilibre d'un système vivant relève de milliers de paramètres, aussi bien internes que d'apports externes. Son étude au niveau local est connue (gestion du glucose par exemple) mais fait partie d'un système plus complexe tendant vers un équilibre global. La compréhension des interactions des différentes sous-composantes pourrait grandement aider dans la recherche sur des maladies de dérèglement du corps humain. De même, nous pouvons étudier au réseau neuronal, une dynamique sociale, un système chimique.



# Modélisation intégrative

« Simplicity is prerequisite for  
reliability. »"

---

*(Edsger W. Dijkstra)*



## Chapitre 3

# Modélisation intégrative des Smart Grids

L'optimisation d'un système complexe est difficile et demande une méthodologie particulière. Grefenstette [24] définit une première approche de résolution. Tout d'abord, des algorithmes d'optimisation appropriés à chaque application du système doivent être sélectionnés. Deuxièmement, les paramètres des algorithmes doivent être accordés pour améliorer l'efficacité.

Les Smart Grids visent à lisser la courbe de la consommation, de réduire la consommation globale, d'équilibrer l'offre et la demande, et d'intégrer les nouvelles technologies. Les contraintes sont d'envoyer les commandes/besoins énergétiques et d'optimiser les flux énergétique, d'effectuer les maintenances préventives, de contrôler les permutations et minimiser les charges pour optimiser les investissements, tout en traitant de la génération des énergies renouvelables (à production erratique) et de stockage.

L'optimisation des sous-composantes doit répondre aux critères locaux, à la complexité due aux systèmes distribués et aux objectifs globaux. Le temps réel posant des problèmes de données asynchrone, le Smart Grid sera résolu par intervalle de temps de cinq minutes, temps d'itération récurrent dans la littérature sur les Smart Grids [60].

D'un point de vue technique, les Smart Grids présentent de nombreux aspects complexes à résoudre [25, 45] :

1. Non-linéarité des paramètres du système d'alimentation, en particulier en présence des énergies renouvelables (EnR) locales.
2. Incertitude de la demande et de la production qui sont fonctions du temps et des contingences.
3. Dynamique du système représentant le marché, la disponibilité des EnR, la reconfiguration du réseau et du report de consommation.
4. Paramètres stochastiques en raison d'événements d'origine humaine ou naturelle et plus des différentes échelles de temps de fonctionnement des appareils.

Dans ce chapitre, les trois sous-composantes seront étudiées : le niveau local, le niveau microgrid, et le réseau T&D. Le modèle proposé est un outil d'aide à la conception d'un Smart Grid, dans un premier temps, nous proposerons un modèle ne prenant pas en compte le comportement des consommateurs et la dynamique des prix. Ce modèle a été



programmé via un modèle multi-agents par Coralie Petermann dans le cadre de sa thèse intitulée « Contributions à la modélisation de systèmes socio-techniques complexes : cas du Smart Grid, analyse structurelle et simulation » avec le Professeur Marc Bui et le Docteur en informatique Sofiane Ben Amor.

## 3.1 Répartition locale de l'énergie

Les compteurs intelligents sont capables de mesurer l'énergie produite, de gérer la puissance qui transite et de piloter la courbe de charge. Ils disposent de capacités de communication bidirectionnelle qui les rendent pilotables à distance. Ils donnent donc la possibilité au consommateur d'avoir une meilleure appréhension de sa consommation présente et future. Que ce soit l'éclairage, le chauffage et l'air conditionné, l'équipement informatique et serveurs, les moteurs des procédés industriels, le potentiel d'économies d'énergies n'est pas négligeable.

La gestion active des bâtiments est un complément indissociable aux solutions passives pour atteindre et dépasser les objectifs du Grenelle de l'environnement visant à baisser de 20% les émanations de carbone et de 20% la consommation globale. Par exemple, d'après le United-States Department of Energy, 65% de la puissance consommée est utilisé dans les moteurs de tailles diverses, dont la plupart fonctionne à plein régime chaque fois qu'ils sont allumés et quel que soit le besoin réel.

### 3.1.1 Gestion des appareils

Dans le cadre de la gestion de la domotique, nous intégrons une nouvelle variable, appelée priorité de fonctionnement, notée  $\rho_i$  pour l'appareil  $i$ . Elle est définie comme l'intérêt de fournir de l'énergie à l'appareil. La mise en place d'une gestion de la priorité de fonctionnement va permettre de réguler les pics de consommation et niveler les creux. Cette variable dépend de l'importance de l'appareil dans le niveau local, c'est à dire au sein du bâtiment, de sa consommation maximum ainsi que de son temps de fonctionnement. Les appareils à usage instantané tels que luminaires, ont une priorité de 0 garantissant son fonctionnement.

La priorité de fonctionnement est gérée par la domotique ou le contrôleur local. Un coefficient agit sur la priorité de l'appareil. La gestion des fluctuations des priorités de fonctionnement est donc fondamentale pour le bon fonctionnement du Smart Grid. Diverses méthodes de gestion sont possibles :

- Gestion par fonction interne : au lieu de simuler l'environnement, il est possible d'utiliser des fonctions de substitution. Ces dernières sont ensuite simulées par des schémas stochastiques afin d'éviter des schémas identiques. Chaque appareil agit indépendamment des autres appareils locaux.
- Gestion par rétroaction : les différentes statistiques et analyses d'une itération permettent d'établir des schémas de consommation et des prévisions à moyen et long terme. Les contraintes externes influencent les données en début de chaque nouvelle itération.

Dans le cadre de la modélisation, la gestion par rétroaction sera utilisée. Des schémas de consommation de divers appareils sont connus, et parfois fournis par le fabricant. Les horaires de consommation des appareils sont déduits des courbes de consommation et de diverses études du consommateur. Ils fourniront les données d'entrée lors de la mise à jour à chaque nouvelle itération. Afin de rendre le modèle plus dynamique, reflétant un

réseau intelligent, les rétroactions des données en top-down influenceront les priorités des appareils, pouvant les modifier au cours d'une itération afin d'optimiser la consommation.

### 3.1.2 Estimation de la consommation

#### 3.1.2.1 Choix de l'algorithme

Les données entrantes sont les appareils (consommation et priorité) et les pronostics. Le but est de répartir au mieux l'énergie en fonction des priorités de consommation sans dépasser l'énergie reçue. L'algorithme dont nous avons besoin à cette échelle doit distribuer l'énergie obtenue entre les différents appareils. Voici les problèmes de Karp compatibles avec nos données et l'objectif :

1. Set packing : le rangement valide pour tous les articles minimisant le nombre de boîtes utilisées est recherché.
2. Knapsack (sac à dos) : un sac à dos est rempli sans dépasser sa capacité et en maximisant l'utilité des objets pris.
3. Job Sequencing : le problème est de trouver une séquence optimale de sorte que le temps total machine écoulé soit minimum résultant une planification des tâches.

Compte tenu de nos données, le problème de sac à dos est le plus approprié car il correspond en tout point à notre problème. En effet la charge maximale du sac à dos est l'énergie reçue. Et l'utilité des objets est fonction de leur consommation et de leur priorité. Le Set packing est une version plus élaboré du Knapsack, n'offrant aucun avantage par rapport à ce dernier dans nos conditions. Quant au Job Sequencing, il n'est pas envisageable à cause de la dynamique du système, il n'est pas possible de planifier des tâches compte tenu que ces dernières peuvent varier dans le temps. La charge de calcul supplémentaire diminue les capacités du Smart Grid sans pour autant offrir des schémas de consommation sûr.

#### 3.1.2.2 Processus de résolution

Le début d'une nouvelle itération commence avec la mise à jour des données de consommation, de production et de la distribution. Chaque niveau local va alors comparer ses valeurs de consommation par rapport aux pronostics calculés aux temps précédents (voir figure 3.1.1) :

1. Chaque niveau local met à jour sa consommation par rapport aux données fournis par la domotique et les capteurs.
2. Chaque niveau local compare sa consommation par rapport aux pronostics.
3. En fonction des résultats : Si la consommation est conforme aux pronostics, alors elle servira de référence.
4. Sinon, un problème de sac à dos est effectué pour obtenir une consommation de référence.

La consommation de référence ainsi que les données de la domotique sont envoyés au niveau microgrid gérant le niveau local en question.

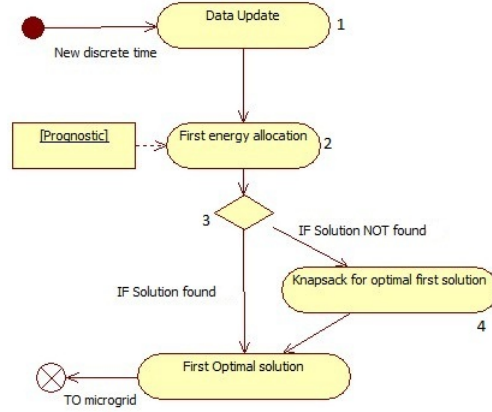


FIGURE 3.1.1 – Diagramme d'activité du niveau local.

### 3.1.3 Résolution d'un problème de sac à dos par programmation dynamique

La programmation dynamique est une méthodologie pour concevoir des algorithmes dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation. Étant donné qu'il existe une multitude de solutions réalisables, l'algorithme doit fournir la meilleure solution possible. La programmation dynamique est une méthode de résolution, pour les problèmes qui satisfont au principe d'optimalité de Bellman [5]. L'algorithme se décompose en quatre problématiques :

1. Caractérisation de la structure d'une solution optimale ;
2. Définition récursive de la valeur de la solution optimale.
3. Calcul ascendant de la solution.
4. Construction de la solution à partir du calcul ascendant.

**Définition 1.** Bellman. Un problème possède la propriété de sous-structure optimale si une solution optimale contient la solution optimale des sous-problèmes.

*Remarque 1.* Le problème du sac à dos possède la propriété de sous-structure optimale, i.e. que l'on peut construire la solution optimale du problème à  $k$  variables à partir du problème à  $k - 1$  variables.

**Problème 1.** Soit  $F_k(E)$  le meilleur cout pour remplir un sac de taille  $E$  avec les  $k$  premiers objets. La récurrence montre que  $F_k(E) = \max\{F_{k-1}(E), F_{k-1}(E - p_k) + u_k\}$ , en effet l'ajout d'un nouvel objet augmente ou non le meilleur cout. Dans le cas où le nouvel objet n'est pas rajouté au sac,  $F_k(E)$  est égale à  $F_{k-1}(E)$ . Dans le cas où le nouvel objet offre une meilleure utilité, i.e. dans le cas où l'objet n'est pas présent mais que le sac (sans l'objet) possède la place suffisante pour accueillir le nouvel élément, et qu'il soit optimal (soit la formule  $F_{k-1}(E - p_k)$ ), alors  $F_k(E)$  est égale à  $F_{k-1}(E - p_k) + u_k$ ,  $u_k$  étant l'utilité du nouvel objet rajouté dans le sac décrit précédemment. Nous donc

cherchons à calculer  $F_n(C)$ , avec  $n$  le nombre total d'objet et  $C$  la taille maximale du sac à dos étudié, le processus est décrit dans l'algorithme 3.1.

Dans notre cas de sac à dos, les objets sont les appareils. Le poids d'un appareil est sa consommation en fonctionnement. La capacité maximale est l'énergie reçue à l'itération courante. Nous cherchons donc à maximiser l'utilisation au moindre cout de l'énergie. Pour calculer l'utilité des appareils, nous cherchons dans un premier temps  $conso_{max} * \rho_{max}$ , le produit le plus grand de la consommation par la priorité pour les appareils du niveau local. L'utilité est alors fonction du rapport  $conso_e * \rho_e$  de chaque appareil par rapport au maximum calculé. La consommation de l'appareil est ensuite ajouté afin que le poids de l'appareil soit aussi prit en compte indépendamment. Nous obtenons donc le calcul suivant pour l'utilité de l'appareil  $e$  :  $u_e = (conso_{max} * \rho_{max}) - (conso_e * \rho_e) + conso_e$ .

**Exemple 1.** Nous disposons des éléments suivants :  $C = 8$ , et cinq objets décrits dans le tableau ci-dessous,

$i$	1	2	3	4	5
$p_i$	3	4	5	4	2
$u_i$	15	18	20	12	6

Nous obtenons le tableau de résultat du sac à dos suivant :

E i	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	6	6	6	6	6
3	15	6	6	6	6
4	15	18	12	12	6
5	21	20	20	12	6
6	24	24	20	18	6
7	33	26	26	18	6
8	35	30	26	18	6

La solution optimale de 25 est obtenue avec les éléments 1 et 3 d'après le second algorithme du sac à dos :

k	1	2	3	4	5
E	8	5	5	0	0
x[k]	1	0	1	0	0

$$conso_{moy} = conso_1 + conso_3 = 8.$$

### 3.1.4 Normalisation des données

Afin d'augmenter la rapidité de résolution du problème du sac à dos, nous le résolvons en normalisant les poids des objets, pour cela le PGCD est calculé entre les appareils

---

**Algorithme 3.1** Construction du sac optimal.

---

Entrée : *pronostics()* pronostics de l'itération précédente  
           *conso<sub>e</sub>* consommation de l'appareil *e*  
           *u<sub>e</sub>* utilité de l'appareil *e*

Sortie : *F*[][] tableau de résolution du sac à dos  
         *x*[] tableau des appareils sélectionnés

Variables : *C* énergie reçue d'après les pronostics  
           *e* nombre d'appareil pouvant être contrôlable

**Début**

$C \leftarrow \text{pronostics}()$

$k = e$

**Pour**  $E = 0$  à  $C$  **Faire**

**Si**  $\text{conso}_k \leq E$  **alors**

$F[k][E] = \text{conso}_e$

**Sinon**

$F[k][E] = 0$

**Fin Pour**

**Pour**  $k = e - 1$  à 1 **faire**

**Pour**  $E = 0$  à  $C$  **faire**

$F[k][E] = F[k + 1][E]$

**Si**  $\text{conso}_k \leq E$  et  $u_k + F[k + 1][E - \text{conso}_k] > F[k + 1][E]$  **alors**

$F[k][E] = u_k + F[k + 1][E - \text{conso}_k]$

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Fin Pour**

**Fin**

L'algorithme suivant permet de trouver les objets sélectionnés.

**Début**

$E = C$

**Pour**  $k = 1$  à  $e - 1$  **faire**

**Si**  $F[k][E] = F[k + 1][E]$  **alors**

$x[k] = 0$

**Sinon**

$x[k] = 1, E = E - p[k]$

**Si**  $F[e][E] = 0$  **alors**

$x[e] = 0$

**Sinon**

$x[e] = 1$

**Fin**

Complexité :  $O(n_e * C)$  avec  $n_e$  le nombre d'appareil du niveau local et  $C$  la quantité d'énergie reçue.

---

actuellement non consommateur, voir l'algorithme 3.2. En effet, le poids des appareils consommateurs peut être directement déduit de la taille du sac.

Le pire cas de résolution d'un PGCD entre  $a$  et  $b$ , celui où le nombre d'itérations à exécuter est le plus grand, est celui où  $a$  et  $b$  sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci  $F$ , la division a toujours un facteur égale à 1. L'algorithme d'Euclide effectuée au plus  $n - 1$  itérations,  $a$  étant le  $n$ -ième terme de la suite. La complexité au pire de l'algorithme d'Euclide est fonction du processus inverse du calcul de la suite de Fibonacci, sa complexité est  $O(\log^2(\sup(a, b)))$ .

---

**Algorithme 3.2** PGCD par algorithme d'Euclide étendu.

---

Entrée :  $conso_e$  consommation de l'appareil  $e$   
 Sortie :  $min$  valeur du PGCD de toutes les consommations  
 Variables :  $e$  nombre d'appareil pouvant être contrôlable  
              $r, r'$  les restes de la division euclidienne  
              $u, v$  les facteurs de la division euclidienne  
              $rs, vs, us, q$  des variables temporaires

**Début**

$min = +inf$

**Pour tout** couple  $(a, b)$  tel que  $1 < a < b < e$

$a = conso_a, b = conso_b$

$r = a, r' = b, u = 1, v = 0, u' = 0, v' = 1$

**Tant que**  $(r' \neq 0)$  faire

$q = \frac{r}{r'}$

$rs = r, us = u, vs = v$

$r = r', u = u', v = v'$

$r' = rs - q * r', u' = us - q * u', v' = vs - q * v'$

**Si**  $(r' > 0)$  &  $(min > r')$  alors  $min = r'$

**Si**  $(min = 1)$  alors **Fin** algorithme

**Fin Tant que**

**Fin Pour tout**

**Fin**

---

### 3.1.5 Processus de recherche d'une solution initiale

D'après les pronostics, nous connaissons la consommation à l'étape précédente  $i - 1$ , de plus les pronostics établissent un schéma de consommation pour l'étape  $i$  (sauf lors de l'initialisation). Si la consommation n'est pas identique aux pronostics, nous devons connaître un schéma de consommation possible. Pour obtenir cette valeur, nous aurons alors recours à un problème de sac à dos (voir algorithme 3.3).

Les valeurs obtenues par le sac à dos sont biaisés par la normalisation des valeurs d'entrées, il faut donc restituer les bonnes valeurs afin de renvoyer des données traitable au niveau microgrid (voir algorithme 3.4).

---

**Algorithme 3.3** Attribution de l'énergie.

---

Entrée :  $pronostics()$  pronostics de l'itération précédente  
 $conso_e$  consommation de l'appareil  $e$   
 $\rho_e$  priorité de l'appareil  $e$   
Sortie :  $conso_{moy}$  du niveau local  
Variables :  $e$  nombre d'appareil pouvant être contrôlable  
 $min$  PGCD entre tout les appareils

**Début**

$conso_{moy} \leftarrow pronostics()$

**Pour tout** appareil  $e$  tel que  $\rho_e \leq 1$

$conso_{min} += conso_e$

**Fin Pour Tout**

**Si**  $conso_{min} \leq conso_{moy}$

**Fin** algorithme

**Sinon**

$conso_{moy} = 0$

    Calculer  $min$  le PGCD entre les appareils

$conso_{moy} = \frac{conso_{moy}}{min}$

**Pour**  $1 < i < e$

$conso_i = \frac{conso_i}{min}$

**Fin Pour**

    Effectuer Sac à dos  $(conso_{moy}, e) \rightarrow conso_{moy}$

**Fin Si**

**Fin**

Complexité :  $O(n_e)$  avec  $n_e$  le nombre d'appareil du niveau local (la normalisation sera explicité avec la résolution du sac à dos).

---



---

**Algorithme 3.4** Données de consommation.

---

Entrée :  $conso_e$  consommation de l'appareil  $e$   
 $\rho_e$  priorité de l'appareil  $e$   
 Sortie :  $conso_{moy}$  du niveau local  
 Variables :  $e$  nombre d'appareil pouvant être contrôlable

**Début**

$conso_{moy} = 0$

**Pour** chaque appareil dont  $\rho_e > 0$

$conso_e = conso_e * min$

**Fin Pour**

**Pour** chaque élément dont  $\rho_e = 0$  et  $e_i \in$  sac optimal

$conso_{moy} = conso_{moy} + conso_e$

**Fin Pour**

**Fin**

Complexité :  $O(n_e)$  avec  $n_e$  le nombre d'appareil du niveau local.

---

**Exemple.** Prenons 5 maisons et deux microgrids, les deux premières maisons appartiennent au premier microgrid, et les trois suivantes au deuxième microgrid. Le tableau suivant présente la répartition de l'énergie parmi les consommateurs, les appareils en gras sont fournis en énergie par le sac à dos au niveau local. Dans l'ordre, les valeurs d'entrée sont la consommation, la priorité et l'utilité de l'appareil :  $conso_e/\rho_e/u_e$  pour chaque appareil de la maison,  $u_e = (conso_{max} * \rho_{max}) - (conso_e * \rho_e) + conso_e$ .  $Fc$  représente l'énergie prévue pour cette itération d'après les pronostics, et  $conso_{min}$  la consommation minimale de la maison (appareil déjà en consommation).

	Maison1	Maison2	Maison3	Maison4	Maison5
Appareil 1	<b>1/0/81</b>	<b>1/0/16</b>	<b>1/0</b>	<b>1/0/33</b>	<b>1/0</b>
Appareil 2	<b>1/1/80</b>	<b>1/0/16</b>	<b>1/0</b>	<b>1/1/32</b>	<b>3/0</b>
Appareil 3	<b>3/0/83</b>	<b>2/1/15</b>	<b>10/0</b>	<b>3/0/35</b>	
Appareil 4	5/2/75	<b>3/0/18</b>		3/2/29	
Appareil 5	20/4/20	4/3/7		<b>4/1/32</b>	
Appareil 6		5/3/5		8/4/8	
Fc	4	6	12	8	6
$conso_{min}$	5	7	12	9	4

### 3.1.5.1 Complexité

Le niveau local forme une suite d'algorithmes successifs, il est donc important de calculer sa complexité globale. La plupart des algorithmes ne tiennent compte que du nombre d'appareil du niveau local traité. La normalisation ainsi que le sac à dos ont des complexités facteurs de ce nombre. Néanmoins, la complexité de ces deux algorithmes est

directement liée. En effet, la normalisation permet de réduire la taille du sac à dos. Regardons si la normalisation permet de réduire la complexité globale.

La normalisation a une complexité de  $O(n \log(e_{max}))$  tandis que la sac à dos est en  $O(nC)$ , avec  $n$  le nombre d'appareil,  $e_{max}$  la plus grande consommation et  $C$  l'énergie reçue. La normalisation est donc bénéfique si, en considérant  $C_0$  le poids d'origine sans normalisation,  $C + \log(e_{max}) < C_0$ . Dans le cas où le PGCD entre la consommation des appareils équivaut à 1, il est évident que la normalisation ne soit pas rentable, en effet  $C_0 + \log(e_{max}) > C_0$ . Mais nous devons considérer les gains potentiels de cette normalisation. Soit  $min$  le PGCD entre tous les appareils,  $C = \frac{C_0}{min}$ , la relation devient alors  $\log(e_{max}) < \frac{C_0(min-1)}{min}$ . Le facteur  $\frac{min-1}{min}$  étant proche de 1 avec  $min$  grand. L'inéquation est alors la suivante :  $\log(e_{max}) < C_0$ . Il est évident que le log de la consommation la plus grande du sac à dos soit strictement inférieur à l'énergie reçue. La normalisation fournit un gain de calcul considérable sur le temps. Nous avons une complexité du niveau local de  $O(n(C_0 + \log(e_{max})))$  dans le pire des cas donc  $O(nC)$ .

### 3.1.5.2 Problématique autour de l'utilité

La répartition de l'énergie étant résolue par méthode exacte, le résultat est donc optimal d'un point de vue mathématique. D'un point de vue humain ou industriel, il est difficile de déterminer l'optimalité car le confort et d'autres paramètres sont difficilement quantifiables. En effet, ce dernier dépend de chaque individualité.

Dans un même contexte, nous pouvons considérer n'importe quel ajout de matériel consommateur ou toute stratégie de consommation du moment que ces derniers renvoient au niveau local une priorité de consommation et la consommation du matériel. Ainsi, la gestion de la domotique, des véhicules électriques ou toute autre technologie n'est pas un facteur dans le processus du niveau local, ce sont des outils en son aval.

## 3.2 Gestion de l'offre et de la demande

Un microgrid est un regroupement de maison connexe, ou d'un immeuble par exemple, communément appelé un écoquartier. Le microgrid est l'échelon le plus important du Smart Grid. Il est la passerelle entre l'offre des distributeurs et la demande des petits consommateurs. Ainsi, il doit gérer à la fois les utilisateurs et les fournisseurs. Le microgrid doit donc faire correspondre les entrées et les sorties des deux autres niveaux, tout en gérant les énergies en fonctions des priorités. Cette double optimisation est d'autant plus ardue de par la nature unique des niveaux locaux sous sa responsabilité.

Le problème de la gestion de l'offre et la demande est complexe. Un simple algorithme d'optimisation ne peut pas prendre en compte l'aspect dynamique du réseau. Une métaheuristique peut trouver un optimum local mais pas global, et ainsi mettre en péril l'intégrité du réseau. Par exemple, la solution peut créer de grand écart de répartition de la consommation, et ainsi délaissé une partie des consommateurs. L'algorithme ayant pour but de gérer l'offre et la demande de façon intelligente doit donc être flexible et dynamique.

### 3.2.1 Problème de l'offre et de la demande

#### 3.2.1.1 Choix de l'algorithme

Chaque microgrid a des besoins en énergie, les différents microgrid sont en compétition dans l'obtention de la ressource commune. L'algorithme utilisé dans la résolution de ce problème doit donc prendre en compte les consommateurs et les producteurs dans le but d'obtenir la meilleure configuration possible.

Les trois méthodes suivantes permettent de résoudre ce problème :

1. Enchères : les joueurs possèdent des objectifs à remplir. Ils misent pour obtenir le meilleur gain, une notion de risque restreint les joueurs dans un domaine d'optimalité.
2. Problème d'affectation : soient deux ensembles d'éléments  $A$  et d'éléments  $B$ . Chaque  $a_i$  déclare ses préférences chez les  $b_i$  et vice-versa. Le but est de maximiser les gains pour chaque couple  $(a_i, b_j)$ .
3. Théorie des jeux : généralisons le problème. Les joueurs possèdent diverses stratégies de consommation ou de distribution. Chaque stratégie possède un gain. L'objectif est de trouver un équilibre parmi les stratégies des joueurs.

Un système d'enchères offre une facilité de modélisation et de résolution. Les microgrids sont libres d'effectuer l'action qui leur est la plus propice, en prenant en compte les plafonds et les priorités, sans prendre en compte les actions des autres microgrid. Un système de rétroaction entre les microgrids et la distribution de l'énergie doit être mis en place afin de pallier au manque de communication entre les divers microgrids. Le problème d'affectation est difficilement solvable dans un système distribué. Les différents comportements liés aux jeux permettent aux agents de s'auto-réguler, mais la résolution est complexe et source de déséquilibre si mal paramétré, il sera étudié dans le chapitre suivant.

#### 3.2.1.2 Interaction consommateur-fournisseur

Dans un premier temps, les enchères sont aléatoires et basées sur une valeur proche de la  $conso_{moy}$  du niveau local en question. Par ailleurs, l'énergie reçue ne doit pas perturber les autres joueurs. Une enchère trop importante ou trop faible déséquilibrerait à la fois le niveau local, le microgrid et les consommateurs adjacents, pouvant mettre en péril la distribution de l'énergie dans le réseau. Chaque niveau local fait partie que d'un seul microgrid, délimité par la configuration en arbre du réseau. Le déroulement des algorithmes suivant est illustré dans la figure 3.2.1 :

1. Recherche d'équilibre :
  - a) Chaque niveau local envoie sa consommation au microgrid lié.
  - b) Les microgrids effectuent une enchère pour chacun des joueurs.
  - c) Les microgrids (sous-stations) renvoient l'enchère au niveau du réseau T&D (station). Une sous-station n'est reliée qu'à une seule station.

- d) La station additionne les enchères des sous-stations desservies.
  - e) Attente d'un retour du niveau T&D.
2. Après équilibre :
- a) Chaque niveau local effectue un problème de sac à dos avec l'énergie reçue.
  - b) L'énergie non consommée est répartie dans un problème de sac à dos à l'échelle supérieure jusqu'au niveau de la sous-station.
  - c) Les statistiques sont mises à jour et les pronostics calculés pour la prochaine itération.

L'étape 1 forme l'action bottom-up. Le consensus est obtenu par rétroactions top-down successives. L'énergie finale est distribuée aux niveaux locaux, puis les excédents sont remontés à l'échelle supérieure. Cette distribution autorise une flexibilité de la répartition tout en garantissant l'énergie aux consommateurs.

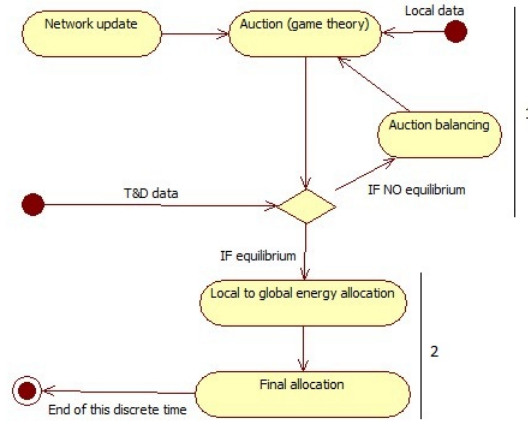


FIGURE 3.2.1 – Diagramme d'activité du niveau microgrid.

### 3.2.2 Cas d'étude : enchères de type aléatoire centrée

Afin d'effectuer des enchères proches de la première valeur de consommation  $conso_{moy}$ , nous utiliserons dans cet outil d'aide à la décision la loi normale  $\mathcal{N}(conso_{moy}, \sigma^2)$ . Analysons en premier temps les caractéristiques de la loi normale (voir figure 3.2.2).

**Définition 2.** Une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi normale, noté  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  (ou loi normale gaussienne, loi de Laplace-Gauss) d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  strictement positif si cette variable aléatoire réelle  $X$  admet pour densité de probabilité la fonction  $p(x)$  définie, pour tout nombre réel  $x$ , par  $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ .

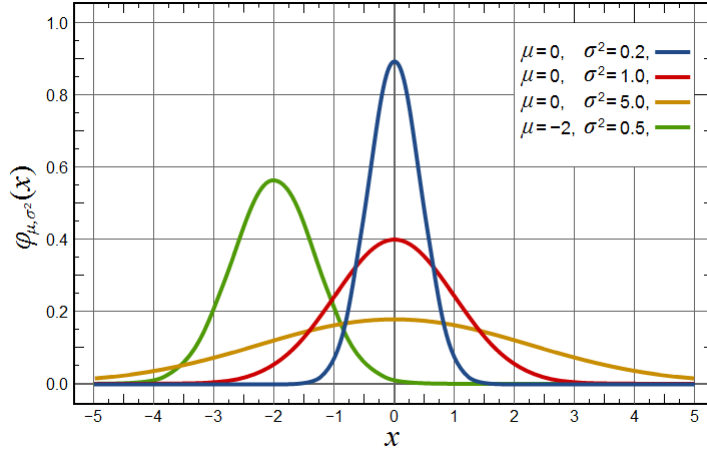


FIGURE 3.2.2 – Densité de probabilité de la loi normale.

**Définition 3.** Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  et si  $a, b$  sont deux réels tels que  $a \leq b$  alors la probabilité de se trouver entre  $a$  et  $b$  est noté

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

La variable aléatoire  $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

L'intervalle  $[a, b] = [\mu - t\sigma, \mu + t\sigma]$  est appelé plage de normalité au niveau de confiance  $\alpha$ . C'est à dire que  $\alpha\%$  de la population se situe dans l'intervalle  $[a, b]$ .

Dans notre cas, nous cherchons à paramétrer la loi normale en fonction des capacités de consommation de chaque niveau local  $i$ , voici les caractéristiques de la loi normale :

1.  $\mu = \text{conso}_{\text{moy}_i}$
2.  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  est la plage de normalité au niveau de confiance 99,7%. Soit une marge de  $\varepsilon$  autour de  $\text{conso}_{\text{moy}_i}$ , alors  $3\sigma = \varepsilon$ .

Une fois que le microgrid a calculé une enchère pour chaque niveau local, il somme les résultats. Le microgrid renvoie donc qu'une seule valeur au niveau T&D, la confidentialité des données est conservée. L'algorithme 3.5 présente le système d'enchères du microgrid.

**Exemple.** Prenons par exemple un niveau local  $i$  avec  $\text{conso}_{\text{moy}_i} = 200$  et avec une marge d'enchère de  $\varepsilon = 30\%$ . La loi normale du niveau local  $i$  est  $\mathcal{N}(200, 20^2)$ . Nous tirons un nombre aléatoire de 0,31. D'après l'approximation de la fonction de répartition de la loi normale réduite, nous en déduisons que  $X^* = -0,5$ . Son enchère est donc  $X = -0,5 * 20 + 200 = 190$ .

---

**Algorithme 3.5** Enchères du microgrid.

---

Entrée	: <i>approximation</i> $\Phi(x^*)$ approximation de la loi normale centrée réduite $conso_{min_i}$ consommation minimale du niveau local $i$ $conso_{moy_i}$ consommation moyenne du niveau local $i$ $conso_{max_i}$ consommation maximale du niveau local $i$
Sortie	: $conso$ résultat de l'enchère du microgrid $X$ tableau des enchères de chaque niveau local du microgrid
Variables	: $\Phi(x^*)$ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

**Début**

$conso = 0$

**Pour** chaque  $i$  niveau local

$\Phi(x^*) = aléa[0 \dots 1]$ $X^* = approximation \Phi(x^*)$ $X_i = X^* * \frac{\varepsilon}{3} + conso_{moy_i}$ Si $X_i < conso_{min_i}$ alors $X_i = conso_{min_i}$ Si $X_i > conso_{max_i}$ alors $X_i = conso_{max_i}$ $conso = conso + X_i$ Stocker $X_i$
---

**Fin Pour**

**Fin**

Complexité :  $O(n_l \omega)$  avec  $n_l$  le nombre de niveaux locaux sous la responsabilité du microgrid et  $\omega$  la complexité de l'enchère (ici l'approximation de la loi normale via un tableau de valeur de la fonction de répartition est de complexité  $O(1)$ ).

*Remarque 2.* Notons que  $conso_{min_i}$  représente la consommation des appareils  $\rho_e < 1$  et  $conso_{max_i}$  la somme de la consommation de tous les appareils du niveau local  $i$ .

---

### 3.2.3 Rétroaction

Les niveaux locaux sont alors récompensés ou punis après rétroaction selon leur enchère. La récompense ou la punition doit permettre de diminuer ou d'augmenter leurs demandes énergétiques. Le niveau local est récompensé si son enchère est inférieure à sa  $conso_{moy}$ , sinon il est puni. Dans le cadre de ce modèle, les récompenses ou punitions se font en appliquant un coefficient (par exemple +5% ou -5%) à la valeur de  $\mu$  de la loi normale.

#### 3.2.4 Attribution finale

Après un nombre déterminé de rétroaction, le microgrid doit distribuer l'énergie acquise parmi les niveaux locaux. Pour cela, chaque niveau local  $i$  s'est vu attribuer  $X_i$  d'après la dernière enchère effectuée. Chaque niveau local effectue alors un problème de sac à dos avec pour taille du sac  $C = X_i$  et remonte les informations sur sa consommation auprès du microgrid. Ce dernier effectue un sac à dos avec l'énergie acquise moins l'énergie déjà répartie parmi les appareils restant dans tous les niveaux locaux desservis :

1. Effectuer un problème de sac à dos au niveau local.
2. Additionner les énergies non allouées. Retirer les appareils desservis.
3. Effectuer un problème de sac à dos au microgrid.
4. Il est possible de remonter l'énergie au niveau supérieur ou de la distribuer sur des microgrids connexes et géographiquement proche (par exemple d'un quartier à son voisin).

**Complexité** : considérons le pire des cas, le sac à dos est effectué au niveau du microgrid avec tous les appareils. Alors la complexité du sac à dos est de  $O((\sum_{i=1}^m (n)_i)C_i)$  avec  $(n)_i$  le nombre d'appareil du niveau local  $i$ ,  $C_i$  l'énergie qu'il a reçue et  $m$  le nombre de niveaux locaux du microgrid. Le calcul de chaque sac à dos au niveau local se fait en parallèle, pour la première étape nous obtenons donc une complexité de  $O(\max((n)_i X_i))$ , pour tout niveau local  $i$ . La suite de l'algorithme effectue un nouveau sac à dos à l'échelle supérieure avec les appareils non fournis. La complexité globale est proche de la complexité du sac à dos au niveau local. Mais puisque cette complexité est difficilement approximable, nous ne prendrons en compte que la complexité dans le pire des cas  $O((\sum_{i=1}^m (n)_i)C_i)$ .

**Exemple.** Prenons 5 maisons et deux microgrids, les deux premières maisons appartiennent au premier microgrid, et les trois suivantes au deuxième microgrid. Le tableau suivant présente la répartition de l'énergie parmi les consommateurs, les appareils en italique sont fournis en énergie par le KP au niveau local, ceux en gras par le niveau microgrid. Dans l'ordre, les valeurs sont la consommation, la priorité et l'utilité de l'appareil :  $conso_e/\rho_e/u_e$  pour chaque appareil de la maison,  $u_e = (conso_{max} * \rho_{max}) - (conso_e * \rho_e) + conso_e$ ;  $Fc$  représente l'énergie prévue pour cette itération, d'après les pronostiques, et  $conso_{min}$  la consommation minimale de la maison; Reçue est l'énergie attribué par les enchères, Consommé est l'énergie utilisé par le consommateur par le

problème de sac à dos (en italique) et *Reste* représente l'énergie résultante redistribuée (en gras).

	Maison1	Maison2	Maison3	Maison4	Maison5
Appareil 1	<i>1/0/81</i>	<i>1/0/16</i>	<i>1/0</i>	<i>1/0/33</i>	<i>1/0</i>
Appareil 2	<b>1/1/80</b>	<i>1/0/16</i>	<i>1/0</i>	<i>1/1/32</i>	<i>3/0</i>
Appareil 3	<i>3/0/83</i>	<i>2/1/15</i>	<i>10/0</i>	<i>3/0/35</i>	
Appareil 4	<i>5/2/75</i>	<i>3/0/18</i>		<b>3/2/29</b>	
Appareil 5	<i>20/4/20</i>	<i>4/3/7</i>		<i>4/1/32</i>	
Appareil 6		<i>5/3/5</i>		<i>8/4/8</i>	
Reçue	<i>4</i>	<i>8</i>	<i>13</i>	<i>11</i>	<i>4</i>
Consommé	<i>4</i>	<i>7</i>	<i>12</i>	<i>9</i>	<i>4</i>
Reste	0	1	1	2	0

### 3.2.5 Cas général : complexité du niveau microgrid

Lors de la recherche de la solution optimale, le niveau microgrid effectue des enchères. Puis, après rétroaction, il effectue des récompenses ou des punitions pour les niveaux locaux sous sa responsabilité. Les complexités associées aux deux algorithmes sont  $O(m\omega)$  et  $O(m\mu)$  avec  $m$  le nombre de niveaux locaux,  $\omega$  la complexité de la stratégie d'enchère et  $\mu$  celle de la stratégie de récompenses.  $\omega$  et  $\mu$  étant variables, nous devons prendre en considération ces deux paramètres pour la complexité globale. Nous avons donc une complexité de  $O(m \cdot \sup(\omega, \mu))$ . La complexité de l'algorithme de distribution énergétique dans la stratégie la plus gourmande en temps est de  $O((\sum_{i=1}^m (n)_i * C_i))$  après  $k$  rétroaction.

## 3.3 Transport de l'énergie

Les microgrids effectuent des enchères sans tenir compte de leur voisinage ou des producteurs. Il y a donc conflit dans l'obtention de la ressource commune.

Le niveau T&D a plusieurs objectifs : déterminer s'il existe un routage réalisable, déterminer les goulots d'étranglement, équilibrer l'offre et la demande, établir des pronostics pour les itérations futures.

### 3.3.1 Problème de routage

#### 3.3.1.1 Choix de l'algorithme

Un circuit électrique peut se voir comme un graphe, dans lequel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arêtes correspondent aux connexions physiques entre ces nœuds. Pour modéliser les courants traversant le circuit, nous considérons que chaque arête peut être traversée par un flot. Ceci offre de nombreuses analogies, par exemple à l'écoulement de l'eau à travers un réseau de canaux.



Comme stipulé par la loi des nœuds de Kirchhoff, le flot à un sommet est conservé, ou identique à l'entrée comme à la sortie ; par exemple, l'eau qui entre dans un canal ne disparaît pas et le canal n'en fabrique pas, donc il y a autant d'eau en sortie qu'en entrée. De plus, une arête a une limite de capacité, tout comme un canal peut transporter une certaine quantité maximale d'eau. Si le flot démarre à un certain sommet (la source) et qu'il se termine à un autre (le puits), alors les principes fondamentaux de l'étude des flots dans un graphe sont obtenus.

Un flot réseau est soumis à trois contraintes linéaires : la limite de capacité sur chaque arête, la création d'un flot non nul entre la source et le puits (i.e. la source crée un flot), et l'égalité du flot en entrée/sortie pour tout sommet autre que la source et les puits. Il est également possible de rajouter d'autres variables au problème pour prendre en compte davantage de situations : il est possible d'avoir plusieurs sources et puits, une capacité minimale sur chaque arête, un coût lorsqu'on utilise une arête, etc.

### 3.3.1.2 Déroulement de la rétroaction

Une fois les enchères accomplies, le réseau doit acheminer l'énergie réservée des producteurs vers les points de consommation. L'énergie circule sur des câbles électriques possédant diverses contraintes techniques limitant la quantité d'énergie pouvant circuler. L'algorithme au niveau T&D doit être capable de limiter les effets de congestion due à l'utilisation massive de quelques lignes. La production et la consommation doivent correspondre au mieux. Si l'offre et la demande ne correspond pas, l'algorithme doit analyser les goulots d'étranglement afin d'ajuster les enchères dans un système de rétroaction (voir figure 3.3.1). Un problème de flot maximum correspond à une version simplifiée des critères énoncés :

1. Le réseau est mise à jour, un graphe résiduel permet de corriger le nouveau routage.
2. Le flot maximum est calculé.
3. Les écarts de consommations ou de productions sont détectés. Ces données sont renvoyées au microgrid par rétroaction pour punir ou récompenser les enchères. Lorsque les écarts sont faibles, le consensus est déclaré, il n'y a plus de rétroaction.

## 3.3.2 Résolution d'un problème de routage

### 3.3.2.1 Problème de réseau de transport

Un circuit électrique peut se voir comme un graphe, dans lequel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arêtes correspondent aux connexions physiques entre ces nœuds.

**Définition 4.** Soit  $G = (V, A)$  un graphe orienté. Soit  $s$  la source et  $t$  le puits de  $G$ . A chaque arête  $(u, v)$  de  $A$  est associée une capacité  $c_{uv}$  qui représente le flot maximum pouvant passer par cette arête. Cette capacité est positive et soit  $c$  le vecteur dans  $\mathbb{R}_+^{|A|}$  contenant les valeurs de toutes les capacités.

Est associé à chaque arête  $(u, v)$  un flot  $f_{uv}$  représentant la quantité de flot vérifiant deux contraintes :

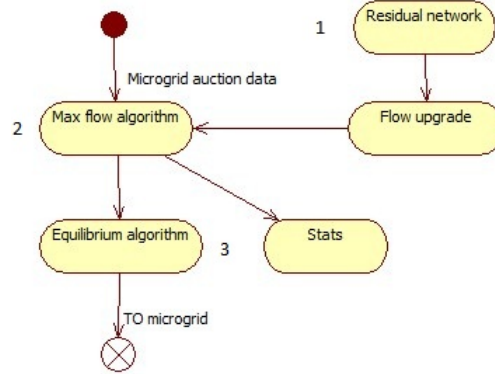


FIGURE 3.3.1 – Diagramme d'activité du niveau T&amp;D.

1. Contrainte de capacité :  $f_{uv} \leq c_{uv}$  pour toute arête  $(u, v) \in A$
2. Conservation du flot :  $\sum_{u: (u,v) \in A} f_{uv} = \sum_{u: (v,u) \in A} f_{vu}$  pour tout  $v \in V \setminus \{s, t\}$ .

La valeur du flot représente la quantité de flot allant de la source au puits. Elle se définit par  $|f| = \sum_{v \in V} f_{sv}$ . Il existe d'autre formule permettant de calculer le flot.

Le problème de réseau de transport, aussi appelé problème d'offres et de demandes, se formule de la manière suivante [12] :

**Définition 5.** Soit un graphe  $G_0 = (V, A)$  et  $c$  une capacité entière sur  $A$ , dont l'ensemble des sommets  $V$  est partitionné en  $\{S, I, P\}$  avec  $S$  un ensemble de sources,  $I$  des nœuds intermédiaires et  $P$  un ensemble de puits. A chaque sommet  $x \in S$  est associé un nombre non-négatif  $a(x) \geq 0$  correspondant à la quantité d'un même produit disponible en  $x$ . En chaque sommet  $x \in P$ , il faut obtenir une quantité  $b(x) \geq 0$  de ce produit. En un sommet quelconque de  $I$ , il y a conservation de produit, c'est-à-dire que la quantité sortante est égale à la quantité entrante.

**Problème 2.** Le problème est donc de trouver une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant :

1.  $0 \leq f(x, X) - f(X, x) \leq a(x)$  pour tout  $x \in S$
2.  $f(x, X) - f(X, x) = 0$  pour tout  $x \in I$
3.  $0 \leq f(X, x) - f(x, X) = b(x)$  pour tout  $x \in P$
4.  $0 \leq f(x, y) \leq c(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in X$

Afin de faciliter la gestion de notre problème, nous associons notre réseau de transport à un graphe classique  $G = (V, A)$  selon la transformation suivante :

- $V = X \cup \{s^*, p^*\}$ .
- $A = U \cup \{(s^*, x) \text{ pour tout } x \in S\} \cup \{(x, p^*) \text{ pour tout } x \in P\} \cup (p^*, s^*)$ .
- $c_{uv}$ ,  $(u, v) \in A$ , est le prolongement de  $c$  suivant :

- $c_{uv} = c(u, v)$  pour tout  $(u, v) \in U$ .
- $c_{s^*v} = a(x)$  pour tout  $x \in S$ .
- $c_{up^*} = b(x)$  pour tout  $x \in P$ .
- $c_{p^*s^*} = \infty$ .

— Le réseau prend en charge une ressource unique.

En d'autres mots, nous cherchons à avoir une utilisation aussi efficace que possible de la capacité de chacune des arêtes, ce qui est le problème de flot maximum. Supposons que l'on coupe le graphe en deux parties, telle que la source est dans l'une et le puits est dans l'autre. Chaque flot doit passer entre les deux parties, et est donc limité par la capacité maximale qu'une partie peut envoyer à l'autre. Trouver la coupe avec la plus petite capacité indique donc l'endroit où le réseau est le plus limité, ce qui revient à établir le flot maximal qui peut le traverser. Ce théorème est appelé flot-max/coupe-min et fut établi en 1956.

### 3.3.2.2 Problème de flot maximum

En optimisation, le théorème flot-max/coupe-min stipule qu'étant donné un graphe de flots, le flot maximum pouvant aller de la source au puits est égal à la capacité minimale devant être retirée du graphe afin d'empêcher qu'aucun flot ne puisse passer de la source au puits.

**Théorème 1.** *Théorème de Ford-Fulkerson. Le flot maximal est égal à la capacité de la coupe minimale.*

**Définition 6.** Soit la coupe s-p de  $G$  un sous-ensemble d'arcs  $D = (S, P)$  qui partitionne  $V$  en deux ensembles  $S$  et  $P$ , tel que la source  $s \in S$  et le puits  $p \in P$ . Soit un ensemble de la coupe de  $D$ , l'ensemble des arêtes séparant  $S$  de  $P$ , i.e. :  $A_c = (u, v) \in A \mid u \in S, v \in P$ . Notons que si cet ensemble d'arêtes est retiré de  $G$ , alors la valeur du flot  $|f|$  est égale à 0.

Enfin, soit la capacité d'une coupe  $c(S, P)$  la somme des capacités des arêtes de  $A_c$  :  $c(S, P) = \sum_{(u,v) \in S^*P} c_{uv}$ . Le problème de coupe minimale se définit comme la minimisation de la capacité  $c(S, P)$ .

*Remarque 3.* La solution du problème de l'offre et la demande existe si l'algorithme de Ford-Fulkerson possède une solution saturant tout les arcs entrant au nœud  $p^*$ . Cela signifie que toutes les demandes sont satisfaites.

Le problème de flot max correspond donc à nos attentes que ce soit au niveau de la répartition des ressources mais aussi au niveau du contrôle de la congestion. A ce niveau du modèle, nous ne comptons pas les couts de transmission des lignes. Le problème sera résolu par l'algorithme de Ford-Fulkerson. L'idée derrière l'algorithme est simple. Tant qu'il existe un chemin partant de la source vers le puits, dont la capacité des arêtes n'est pas saturée, nous envoyons un flot par ce dernier. Un chemin avec la capacité disponible est appelé un chemin augmentant. Lorsqu'il n'y a plus de chemin possible, nous obtenons le flot maximal en sommant les flots partant de la source.

**Théorème 2.** (Condition nécessaire et suffisante d'optimalité). Un flot  $des^*$  à  $t^*$  est maximal ssi il n'admet pas de chaîne augmentante de  $s^*$  à  $t^*$ . L'algorithme de Ford-Fulkerson retourne donc une solution optimale (voir algorithme 3.6).

*Remarque 4.* Dans le cas où il existe plusieurs sources  $\{s_1, \dots, s_n\}$  et/ou plusieurs puits  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , une source mère  $s^*$  est reliée à toutes les sources et tous les puits à un puits père  $t^*$ . Les arcs  $(s^*, s_i)$  et  $(t_i, t^*)$ ,  $i$  de 1 à  $n$  sont de capacité égale à la somme des capacités sortantes (resp. entrantes) de la source (resp. du puits).

*Remarque 5.* Dans le cas d'un graphe non orienté, deux arcs (une sortante une entrante) sont créés à la place de l'arête de même capacité. Tant qu'un arc possède un flot non nul, il est utilisé dans l'algorithme, sinon, l'algorithme utilise l'arc dans le sens du flot additionnel.

### 3.3.3 Mise à jour du réseau

Nous connaissons la répartition de l'énergie à l'étape précédente, il est donc facile de connaître une meilleure répartition à la nouvelle étape. Un algorithme ajuste le graphe avec les nouvelles valeurs de sources et de puits.

Dans le cas d'une baisse de production, certains arcs  $(u, v)$  posséderont des flots dépassant leur nouvelle capacité. Notons  $c^*$  la différence entre l'ancienne et la nouvelle capacité de l'arc  $(u, v)$ . Seuls les sources possédant une capacité inférieure au flot de l'itération précédente sont pris en compte.

Une fois les arcs listés, un nouveau graphe  $G^*$  est créé où pour chaque arcs listés  $c_{uv} = c^*$ , sinon, la capacité est inchangée. L'algorithme de Ford-Fulkerson est exécuté sur le graphe  $G^*$  en forçant l'algorithme à utiliser les arcs marqués : tant qu'il existe  $(u, v)$  listé non saturé  $f'(u, v) < c^*$ , l'algorithme de Ford-Fulkerson continue. Le résultat des flots de Ford-Fulkerson du graphe  $G^*$  est soustrait au graphe  $G$ , les capacités des arcs sont alors mis-à-jour. Après la régulation, l'algorithme de Ford-Fulkerson est effectué sur le graphe  $G$  ajusté. Ce processus est décrit dans l'algorithme 3.7.

**Exemple 2.** Considérons qu'à l'étape  $i - 1$  l'algorithme de Ford-Fulkerson nous délivre le résultat (A) en figure 3.3.2 :

- $s^*$  représente la source mère.
- Les sommets  $\{s1, s2, s3\}$  sont des sources filles.
- Le sommet 4 est un nœud intermédiaire.
- Les sommets  $\{t5, t6\}$  sont des puits fils.
- $t^*$  représente le puits père.

Au temps  $i$  deux changements ont lieu. Au niveau de l'arc  $(5, t^*)$ , la consommation diminue d'une unité, passant de 5 à 4 ; au niveau de l'arc  $(s^*, 2)$ , la production diminue d'une unité, passant de 5 à 4. Nous résolvons le graphe résiduel (B) :

L'arc  $(s^*, s2)$  prend une capacité de 1, la différence de capacité de l'étape  $i - 1$  vers l'étape  $i$ .

---

**Algorithme 3.6** Ford-Fulkerson.

---

Entrée	: le graphe $G(V, E)$
Sortie	: le flot optimal $f$

---

**Début**

**Tant que** le flot n'est pas maximal

    Marquage de la source  $s^*$

**Tant qu'**on marque des sommets

**Pour tout** sommet marqué  $i$

            Marquer les sommets  $j$  non marqués tel que  
             $f(i, j) < c(i, j)$  ou  $f(j, i) > 0$

**Fin Pour tout**

**Fin Tant que**

**Si** le puits  $t^*$  n'est pas marqué alors le flot est maximal

**Sinon** Amélioration du flot()

**Fin Tant que**

**Fin**

**Début** Amélioration du flot

Trouver une chemin qui a permis de marquer  $t^*$  et calculer

$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$  avec

$\varepsilon_1 = \min\{c(u, v) - f(u, v) \text{ avec } (u, v) \in A \text{ (arête directe)}\}$

$\varepsilon_2 = \min\{f(v, u) \text{ avec } (u, v) \in A \text{ (arête inverse)}\}$

Trouver le nouveau flot  $f'$  dans le chemin choisi

**Si**  $(u, v) \in A$  alors  $f'(u, v) = f(u, v) + \varepsilon$

**Sinon**  $f'(u, v) = f(u, v) - \varepsilon$  (arête inverse)

**Fin** Amélioration du flot

Complexité : le flot maximum est atteint quand plus aucun chemin améliorant n'est trouvé dans le graphe. C'est-à-dire que nous obtenons une solution optimale si l'algorithme se termine. Lorsque les capacités sont des entiers, le temps d'exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson est borné par  $O(Af)$  avec  $A$  le nombre d'arête du graphe et  $f$  le flot maximum. En effet, chaque chemin améliorant peut être trouvé en  $O(E)$  et augmenter le flot d'au moins 1.

---

---

**Algorithme 3.7** Ajustement par un graphe résiduel.

---

Entrée : le graphe $G(V, E)$ Sortie : le graphe $G(V, E)$
--

**Début**

**Pour tout**  $(u, v) \in A$

**Si**  $f(u, v)_{(t_{i-1})} > c(u, v)_{(t_i)}$

$c^* = f(u, v)_{(t_{i-1})} - c(u, v)$

Ajouter  $((u, v), c^*)$  à la Liste

**Fin Si**

**Fin Pour tout**

Créer graphe  $G^*$

Recherche de flot maximal de  $G^*$  par Ford-Fulkerson

Soustraire  $G^*$  à  $G$

**Fin**

Complexité : l'algorithme effectue un parcours des arêtes du graphe, puis un algorithme de Ford-Fulkerson. Sa complexité est donc de  $O(Af)$  avec  $A$  le nombre d'arête du graphe complet et  $f$  le flot maximum. Le module d'ajustement a pour objectif de réduire le nombre d'itération nécessaire avant d'atteindre le flot maximum du graphe  $G$ .

---

L'arc  $(t5, t^*)$  prend une capacité de 1, la différence de capacité de l'étape  $i - 1$  vers l'étape  $i$ .

Les autres arcs prennent une capacité égale au flot passant dans le graphe  $G$ .

Nous obtenons comme résultat le graphe (C), ce dernier est soustrait au graphe de départ.

### 3.3.4 Recherche des goulots d'étranglement

Nous remarquons, dans la résolution du flot (C) de la figure 3.3.2, que les arcs  $(s^*, s)$  et  $(t, t^*)$  ne sont pas tous saturés. Cela représente une mauvaise gestion des ressources au niveau de la consommation, ou une mauvaise gestion de l'énergie produite. La différence entre l'énergie totale produite, et l'énergie totale consommée peut être significative. Un algorithme de reconnaissance doit localiser les goulots d'étranglement par surconsommation ou sous-consommation afin d'effectuer une rétroaction vers le niveau microgrid.

Pour cela nous effectuons deux tests (voir Figure 3.3.3) :

1. Ford-Fulkerson sur le graphe  $G$ , sans contrainte de capacité sur les arcs  $(t, t^*)$ . Le résultat fournira le flot maximum sans contrainte de consommation (E).
2. Ford-Fulkerson sur le graphe  $G$ , sans contrainte de capacité sur les arcs  $(s^*, s)$ . Le résultat permettra de tenir compte de la demande de consommation, et ainsi de mieux prévoir la consommation future (F).

Le travail de rétroaction paraît trivial sur cet exemple, mais si nous considérons des dizaines de lieux de production ainsi que de lieux de consommation, alors le problème

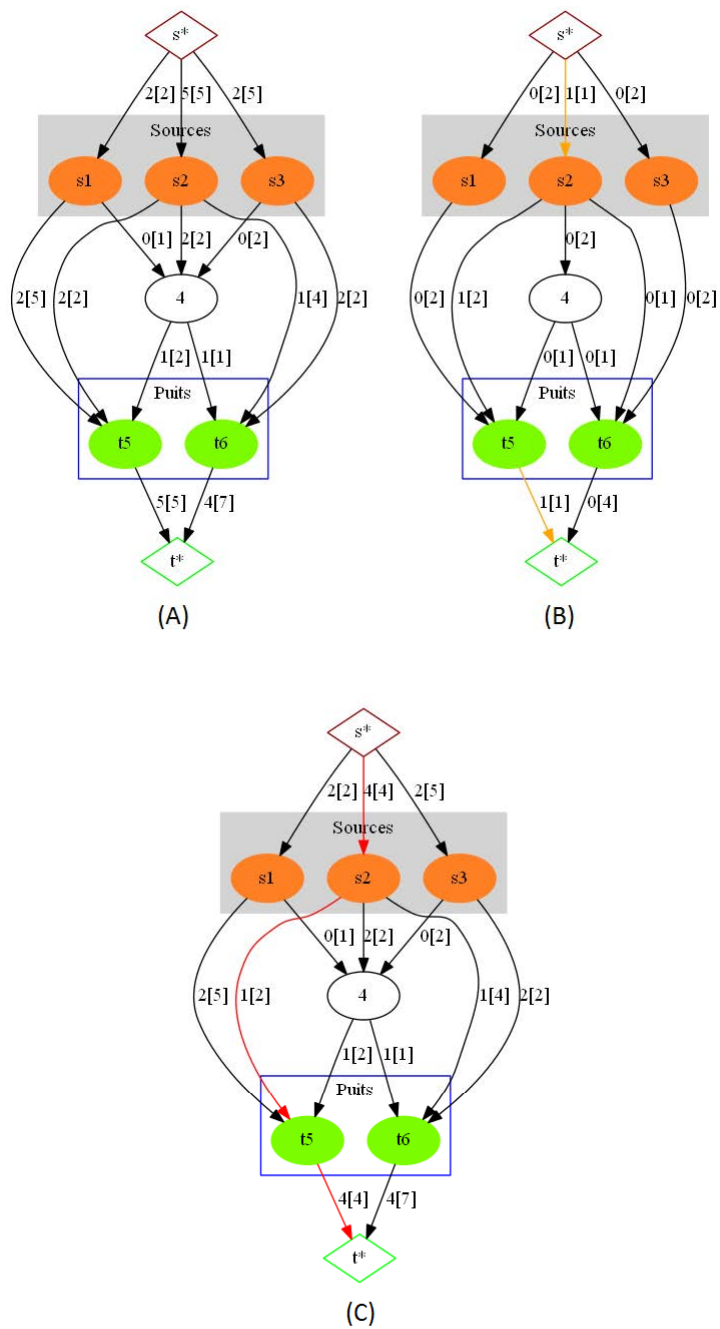


FIGURE 3.3.2 – Ajustement par le graphe résiduel.

du flot maximal peut avoir plusieurs schémas valides. La rétroaction permet donc de réorganiser la répartition des ressources parmi les différents microgrids. Les nouvelles enchères devront ajuster leur demande par les récompenses et les punitions. Après un nombre limité de rétroactions, l'offre et la demande seront ajustés sur tout le graphe.

Le deuxième test a pour objectif de mettre à jour les statistiques de consommation afin de prévoir le nouveau schéma de production énergétique. Le test doit être effectué à chaque rétroaction, afin de prendre en compte les résultats des enchères avant et après soumission de la rétroaction. En effet, l'énergie consommée peut être grandement différente de l'énergie maximum qui peut être consommée au niveau du puits.

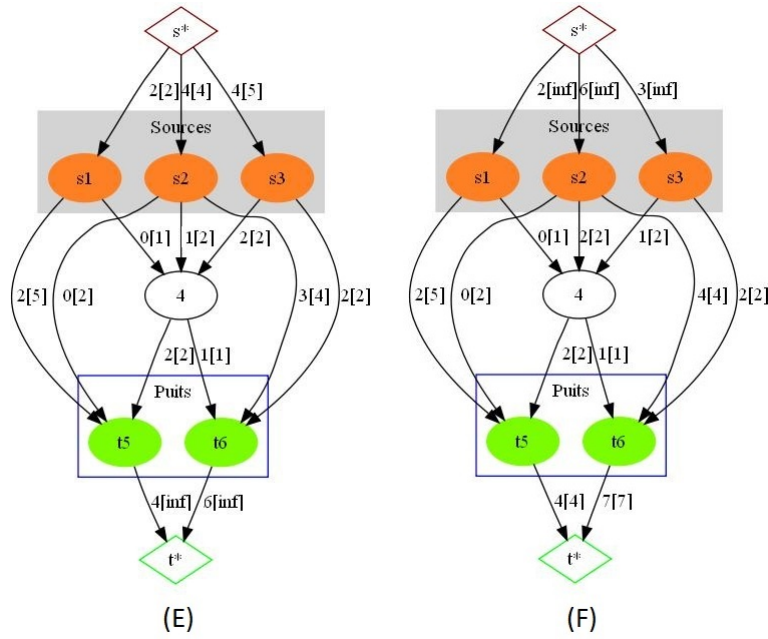


FIGURE 3.3.3 – Rétroaction par recherche de meilleur production et consommation.

## 3.4 Pronostics

La prévision de la consommation future a une grande influence sur le bon déroulement du Smart Grid. En effet, ce dernier a pour objectif de lisser la courbe de consommation tout en garantissant la fourniture en énergie. Afin de prévenir les brownouts et les blackouts, il est important de bien connaître le comportement des utilisateurs, et de prévoir la consommation sur le court terme aussi bien que sur le long terme.

### 3.4.1 La politique d'apprentissage

L'apprentissage regroupe des contrôleurs pour examiner à la fois le pire futur et le meilleur scénario ainsi que les plus probable de survenir maintenant, au court terme et



à l'avenir. Voici les différentes politiques d'apprentissage à partir de données :

1. Les politique myopes : ces politiques sont à court terme et sont, par définition, incapable de voir le futur. Les fonctions myopes n'ont pas de prévision explicite des évènements ou des couts dans l'avenir, et dépendent des fonctions mathématiques de calcul.
2. Les politiques de prévisions : ces politiques impliquent l'optimisation sur un horizon de temps à l'aide d'une prévision de la variabilité possible des évènements exogènes comme la météo, la demande et les prix. Ces politiques peuvent être divisées en trois catégories :
  - a) Les prévisions déterministes : optimisation sur un horizon temporel à l'aide des estimations ponctuelles de ce qui pourrait arriver dans le futur.
  - b) Prévision stochastiques : optimisation sur un horizon temporel à l'aide d'une approximation, comme un échantillon de résultats aléatoires qui pourraient se produire au sein de la gamme de l'horizon.
  - c) Politique d'approximation : ce sont des fonctions qui renvoient une action pour un état, sans résoudre toute forme de problème d'optimisation.

En utilisant des solveurs modernes tels que CPLEX, ces problèmes peuvent être exceptionnellement facile à résoudre sur des horizons courts, mais deviennent exponentiellement plus difficile sur des horizons plus long malgré la connaissance de consommations prédéterminées et prédictives.

Les fonctions non basé sur le temps réel comprennent l'intégration des bases de données existantes et de l'instant présent afin de calculer les opérations futures : l'optimisation opérationnelle, les calculs de cycle de consommation, la planification ou le remplacement des schémas de consommation future, la maximisation des flux. L'intégration de ses fonctions seront utiles à la fois pour la consommation à long terme mais aussi pour les générateurs, les distributeurs et les consommateurs et ainsi réguler la production et la consommation sans provoquer de dysfonctionnement dans le système.

L'implémentation des appareils inclut un profil et des informations sur le cours d'exécution de l'appareil. Un profil est le cycle répétitif le plus court dans la consommation d'énergie, par exemple le cycle marche-arrêt d'un réfrigérateur. L'exécution et le temps de fonctionnement de la majorité des appareils sont donc connus. Le contrôleur local de la maison peut interroger chaque appareil sur l'énergie requise et le temps de consommation afin de décider s'il peut être fourni et d'établir un schéma de consommation [43]. Des variations stochastiques (uniforme, exponentiel, de Weibull, normale et de Poisson) sur le comportement de l'utilisateur et les appareils peuvent être ajoutées pour une vision plus réaliste du problème. Ces valeurs aléatoires sont intégrées aux configurations standards.

Ces modifications dans le cycle prédéfini de consommation seront interprétées lors de la résolution des algorithmes au sein du microgrid. En effet ce dernier représente le lien entre le producteur et le consommateur. Le résultat de chaque enchère, ainsi que sur la répartition théorique des ressources fournissent les tables de données nécessaire à la planification et l'optimisation des ressources.

### 3.4.2 Pronostics utilisés dans notre cas d'étude

Lors de la recherche de déficit de production ou de consommation, nous calculons la répartition idéale de production sans contrainte de consommation, et la répartition idéale de consommation sans contrainte de production (voir figure 3.3.3). Les résultats obtenus au niveau des sources et des puits forment un équilibre pour l'enchère en cours. Ces données permettent de comprendre l'évolution de la consommation au cours du temps, et ainsi de prévoir la future production.

Les pronostics se base sur une moyenne pondérée, où le poids dépend de la rétroaction en cours. Le calcul n'ayant une influence que sur l'itération suivante, les variations de son calcul n'auront pas d'impact sur la résolution de l'itération courante. Les pronostics sont calculées de la façon suivante :

1. Pour les consommateurs : la consommation de la future consommation est la moyenne pondérée des enchères effectuées. Soient  $z_i$  l'enchère effectué à la rétroaction  $i-1$ , alors la consommation utilisée par les pronostics est égale à :  $Z = 2 \frac{\sum_{i=1}^n a z_i}{n(n-1)}$ . Ainsi, les dernières rétroactions, se rapprochant le plus de l'équilibre, aura un plus grand impact dans le calcul de l'itération future.
2. Pour les producteurs : les valeurs obtenues par le graphe avec les productions infinies sont pondérées de la même façon, et la moyenne détermine la production souhaitée. Les centrales n'ayant pas la même capacité à ajuster leur production, il faut alors obtenir un consensus entre elles afin d'avoir la production désirée pour l'itération suivante. Actuellement le modèle ne gère qu'un producteur unique, c'est à dire que toutes les centrales appartiennent au même producteur. Ainsi, le calcul des prochaines productions n'a pas à tenir compte de la concurrence mais seulement des capacités d'augmentation ou de diminution de chaque centrale. De nombreux modèle existe, et peuvent être greffer à notre modèle par un module annexe de la résolution T&D.

## 3.5 Récapitulatif

### 3.5.1 Point de vue structurel

Afin de mieux comprendre la résolution d'une itération, le processus sera décrit à l'aide de la figure 3.5.1.

1. Recherche d'une consommation réalisable : le début d'une nouvelle itération commence avec la mise à jour des données de consommation, de production et de la distribution. Chaque niveau local compare ses valeurs de consommation par rapport aux pronostics calculés en étape 1. Après obtention de leur consommation idéale, chaque niveau local envoie ses données au microgrid (étape 2). Ce dernier effectue des enchères en fonction de la consommation de chaque niveau local, puis somme et envoie le résultat à la station parente (étape 3).

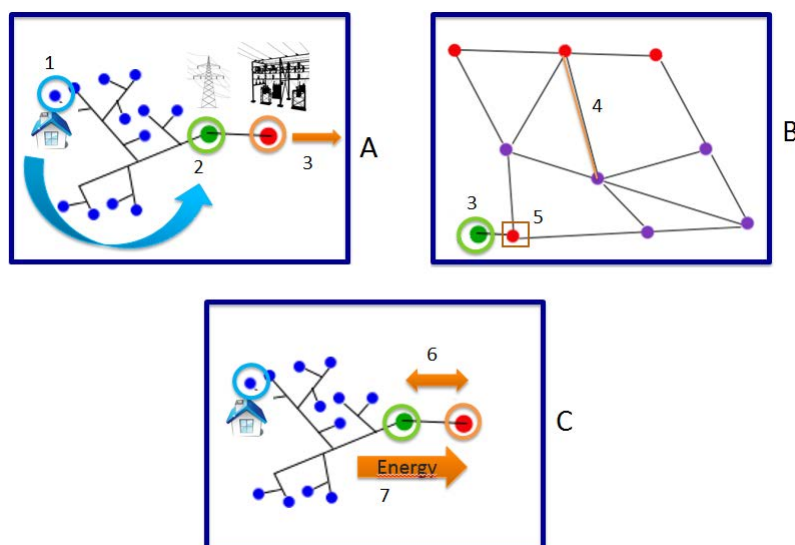


FIGURE 3.5.1 – Déroulement de la résolution.

2. Recherche d'une solution réalisable : à l'étape 4, le réseau T&D met à jour son routage à l'aide du graphe résiduel. Puis, à étape 5, la station prend connaissance de l'énergie possible par le routage.
3. Rétroaction et solution finale : un système de rétroaction entre le microgrid et la station, étape 6, permet d'équilibrer les enchères par rapport à l'énergie pouvant être desservie. Les données de la rétroaction permettent d'obtenir des pronostics pour la prochaine itération. Une fois le consensus trouvé, l'énergie est distribuée à l'étape 7 au niveau local. Les énergies non allouées sont redistribuées par action bottom-up.

### 3.5.2 Point de vue algorithmique

Le point de vue algorithmique (voir Figure 3.5.2) diffère peu du point de vue structurel.

**Séquence A.** Afin de concevoir l'aspect intelligent de l'appareil, nous avons attribué une priorité de fonctionnement à ces derniers, qui modifiera le cout de consommation lors de la répartition énergétique. Cette dernière se fait de manière optimale. En effet, nous utilisons un problème de sac à dos résolu par programmation dynamique après normalisation des données. Sa complexité,  $O(nC_0)$ , avec  $n$  le nombre d'appareils et  $C_0$  l'énergie reçue, peut alors être réduit à  $O(n)$  dans le cas où les pronostics sont juste. Soit  $\min$  le plus petit PGCD entre tous les appareils, la normalisation est bénéfique si  $\log(e_{\max}) < \frac{C_0(\min-1)}{\min}$  avec  $e_{\max}$  la consommation maximal des appareils, ce qui est vrai si  $\min \geq 2$ . La gestion du niveau local est rapide et distribuée, de plus, elle se déroule pendant la gestion de la mise-à-jour des autres niveaux. Dans un même contexte, nous pouvons ajouter n'importe quel

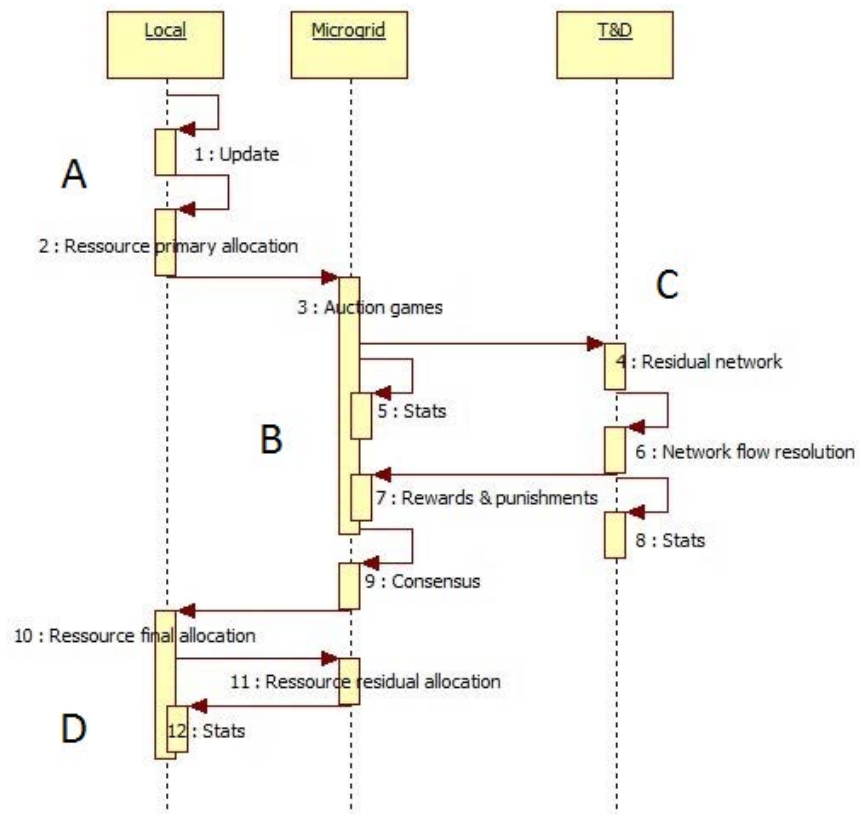


FIGURE 3.5.2 – Schéma séquentiel d'une itération.

ajout de matériels consommateurs ou toute stratégie de consommation du moment que ces derniers renvoient au niveau local une priorité de consommation et sa consommation. La consommation idéale obtenue est noté  $conso_{moy}$  du niveau locale  $i$ .

**Séquence B.** Dans un premier temps nous utiliserons des enchères aléatoires basées sur une valeur proche de la  $conso_{moy}$  du niveau local en question via une variable aléatoire sur une loi normale. Nous devons trouver une solution viable, pour cela un système de rétroaction ajuste la demande jusqu'à arriver à un consensus. Les complexités associées au deux algorithmes de jeux et de rétroaction sont  $O(m\omega)$  et  $O(m\mu)$  avec  $m$  le nombre de niveaux locaux en aval,  $\omega$  la complexité de la stratégie d'enchère et  $\mu$  celle de la stratégie de récompenses (en  $O(n)$  dans notre cas d'étude).

**Séquence C.** Une fois les enchères accomplies, le réseau doit acheminer l'énergie réservée des producteurs vers les points de consommation. L'énergie circule sur des câbles électriques possédant divers critères, contraintes techniques limitant la quantité d'énergie pouvant circuler sur chacune d'elles. Le problème est équivalent à un problème de flot réseau ou réseau d'offres et de demande. Si l'offre et la demande ne correspondent pas, l'algorithme doit analyser les goulots d'étranglement afin d'ajuster les enchères dans un système de rétroaction en effectuant Ford-Fulkerson sur deux schémas : les productions à l'infini, les consommations à l'infini. Ces données servent au calcul des pronostics. La complexité est  $O(Af)$  avec  $A$  le nombre d'arêtes et  $f$  le flot maximal. Le graphe résiduel permet de réduire  $f$  à la somme des différences locales de productions et de consommations.

**Séquence D.** L'énergie est distribuée par sac à dos en fonction de l'énergie allouée. L'énergie non consommée est alors sommée à l'échelle supérieure et redistribuée parmi les appareils non-consommateurs. Les priorités de fonctionnement sont mises à jour en fonction du résultat de la distribution finale. Au pire, la complexité est de  $O((\sum_{i=1}^m (n)_i * C))$ , avec  $C$  l'énergie reçue.

## **Conclusion**

Ce modèle est compatible à tout type de réseau électrique puisqu'il n'est ni dépendant de la structure ni des appareils. Nous pouvons considérer l'ajout de nouveaux modules comme l'économie de marché, la gestion du stockage ou autres sans avoir à modifier la mécanique du modèle. Ces modules doivent être rattachés à une sous-composante existante, ou créés une nouvelle sous-composante compatible avec l'ensemble du système.

Le chapitre suivant propose de nouvelles théories afin de rendre le modèle plus intelligent. De plus, ils répondent aux propriétés suivantes : Self-Healing, flexibilité, et optimalité.



## Chapitre 4

# Outils d'amélioration du modèle

L'outil d'aide à la conception décrit dans le chapitre 3 répond aux critères d'optimalité et de sécurité des données dans le Smart Grid, sans imposer de nouvelles technologies. De plus, il est adaptable d'un point de vue théorique et technologique. Mais ce modèle possède divers défauts notamment une gestion des prix inexistantes.

Dans un premier temps, le réseau sera étudié dans la recherche d'un coût minimum de distribution. Le principe de la prétopologie est intégré dans le but de représenter le réseau. En effet, les gestionnaires de réseau ne connaissent pas toujours les structures locales, il faut donc pouvoir interpréter les données afin de le représenter au mieux. En deuxième temps, la gestion de la domotique sera étudiée via la théorie des jeux dans le but d'offrir des outils de gestion économique à la fois pour le consommateur mais aussi pour les producteurs. L'impact économique est difficilement quantifiable par une modélisation, néanmoins, il est possible de connaître l'impact en comparant les résultats d'un réseau intelligent par rapport au réseau moderne.



## 4.1 Étude prétopologique du réseau

La prétopologie est une théorie mathématique ayant une axiomatique plus faible que la topologie classique, et qui permet d'exprimer les transformations structurelles d'ensembles composés d'éléments en interaction tels que la constitution de coalitions parmi une population, les phénomènes d'alliance, les processus de tolérance, d'acceptabilité et l'émergence de comportements collectifs [6, 39]. La topologie est un cas particulier de la prétopologie.

L'intégration de la prétopologie offre une meilleure modélisation des notions de proximité entre les agents de notre modèle. Cela permet de manipuler plusieurs critères simultanément en utilisant une agrégation booléenne.

Cette théorie modélise de façon plus réaliste le comportement du Smart Grid. De plus, la modification d'un seul critère n'entraîne que la mise à jour de la prétopologie attribuée, et pas une restructuration totale du réseau.

### 4.1.1 Famille de prétopologies

**Définition 7.** Nous appelons adhérence définie sur l'ensemble d'élément  $E$ , toute fonction  $a(.)$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $a(\emptyset) = \emptyset$  et  $\forall A \subset E, A \subset a(A)$ .

**Définition 8.** Nous appelons intérieur défini sur  $E$  toute fonction  $i(.)$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $i(E) = E$  et  $\forall A \subset E, i(A) \subset A$ .

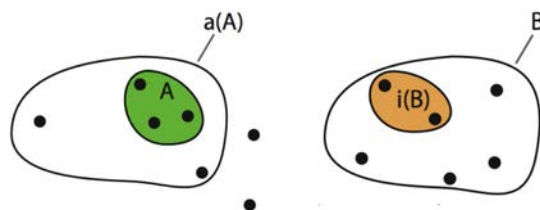


FIGURE 4.1.1 – Adhérence et intérieur de A.

Ces fonctions permettent de modéliser les opérations de base dans les réseaux complexes. Ils sont dynamiques et évoluent à chaque intervalle de temps étudié. Il est donc important de pouvoir les modéliser par des fonctions prenant en compte cette dynamique.

**Définition 9.** Étant donné, un ensemble  $E$ ,  $a(.)$  et  $i(.)$ , le couple  $s = (a(.); i(.))$  est appelé une structure prétopologique sur  $E$  et le 3-uple  $(E, a(.), i(.))$  est appelé espace prétopologique.

L'avantage de la prétopologie est de pouvoir séparer chaque critère dans un espace prétopologique propre afin de simplifier la modélisation. La fonction d'adhérence globale est alors définie comme une agrégation booléenne des adhérences de tous les espaces composant notre ensemble de données. De cette manière, une modification d'un critère est instantanée et la représentation de chaque critère est plus réaliste.

Les espaces prétopologiques peuvent inclure des relations de divers types :

- Espace métrique : les éléments sont liés par des distances.
- Espace binaire : les liens sont de type binaire.
- Espace valué : lorsque les espaces binaires et métriques ne sont pas suffisants, la valeur de chaque arête par une fonction adhérence définie est calculée.

Le Smart Grid étant un système complexe, il est régi par un certain nombre de critères qualitatifs et quantitatifs. La tension des lignes électriques en est un exemple, mais il est également possible de prendre en compte la dispersion électrique en fonction de la longueur des lignes, l'usure des installations, les conditions climatiques, etc.

Par l'intermédiaire de la prétopologie, il est possible de procéder à une analyse structurelle d'un ensemble fini muni, non pas d'une seule relation binaire, mais d'une famille finie de relations binaires. Dans le cadre de cette analyse, la définition d'indicateurs utilisés en théorie des graphes est généralisée. L'objectif est d'élargir cette généralisation de manière à disposer d'une batterie d'indicateurs au moins aussi importante qu'en théorie des graphes.

Enfin, la prétopologie, telle que nous l'avons construite dans ce travail à partir d'une famille de relations binaires, se révèle un outil de modélisation très utile dans le cadre des systèmes multi-agents pour gérer les accointances entre agents et être capable de suivre la dynamique des relations entre eux.

#### 4.1.2 Recherche de flot maximum à cout minimum

Le réseau calculé à partir de la prétopologie est un graphe orienté fortement connexe dans lequel un flot peut circuler sur les arcs. Il est à noter que l'on peut par la prétopologie établir de nombreux espaces possibles, et donc par association logique définir un graphe selon les critères désirés. Chaque arc  $(i, j)$  est caractérisé par :

- $d_{ij}$  la capacité de l'arc, ou borne supérieure sur le flot dans l'arc ;
- $l_{ij}$  la borne inférieure sur le flot dans l'arc ;
- $f_{ij}$  la variable dénotant la valeur du flot dans l'arc ;
- $c_{ij}$  le cout unitaire du flot dans l'arc. Le cout peut varier, pour cela il est possible de dupliquer l'arc avec les différents couts et les capacités correspondantes.

**Exemple 3.** Par exemple si le cout de base est 1 avec un flot minimum de 1, puis 3 pour une capacité entre  $[3, 6]$ , puis 5 pour une capacité entre  $[6, 8]$ , alors l'arc sera triplé. Le premier arc aura un cout de 1 et une capacité comprise entre  $[1, 3]$ , le deuxième arc aura un cout de 3 et une capacité comprise entre  $[0, 3]$ , le troisième arc aura un cout de 5 et une capacité comprise entre  $[0, 2]$ . Cette méthode ne fonctionne que si la fonction de cout est de type croissante ;

L'algorithme de Busacker et Gowen est basé sur la même méthode que Ford-Fulkerson. Les différences sont dans la mise à jour du graphe et le choix du chemin améliorant. A chaque itération, l'arc  $(i, j)$  est valué à  $c_{ij}$  si l'arc  $(i, j)$  n'est pas saturé. De plus, l'arc  $(j, i)$  est valué à  $-c_{ij}$  si l'arc  $(i, j)$  a un flux non nul. Cela revient à faire le graphe d'écart

de la méthode de Ford-Fulkerson. L'algorithme cherche un chemin de la source au puits avec une valeur minimum. S'il existe, le flot est augmenté selon la chaîne correspondante, sinon l'algorithme se termine (voir Figure 4.1.2). Cette recherche peut être effectuée grâce à un algorithme de plus court chemin prenant en compte des arcs négatifs (possibilité de circuit absorbant). L'algorithme ne garantit pas de solution optimale en partant d'une solution aléatoire contrairement à l'algorithme de Ford-Fulkerson.

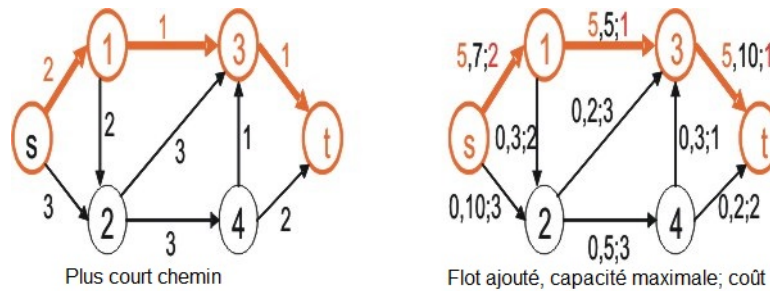


FIGURE 4.1.2 – Première itération de l'algorithme de Busacker et Gowen.

### 4.1.3 Exemple de l'utilisation de la prétopologie dans un Smart Grid

Dans un graphe valué, il est possible de connaître tous les plus courts chemins à partir d'un sommet (algorithme de Ford-Bellman). Il est donc aussi possible de choisir un plus court chemin passant par un arc, par exemple en prenant le plus court chemin de la source vers le sommet de départ de l'arc et celui du la fin de l'arc vers le puits. Il est donc possible de saturer volontairement certains arcs. Le réseau peut palier à des défauts de structure comme une sous-tension dans un arc en obligeant l'algorithme de Busacker et Gowen à saturer ces derniers avant d'appliquer le processus standards. Cette particularité permettra de saturer en priorité les lignes ne pouvant pas supporter de basse tension.

Afin de pouvoir corriger des problèmes de sous-tension ou de sur-tension, nous devons procéder à une analyse prétopologique du réseau afin de définir les lignes à risque. Pour cela, soient trois structure prétopologique  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  (Figure 4.1.3) résultant de l'analyse du réseau sur trois critères différents, ici arbitraires. Chaque arc peut supporter trois niveaux de charge. Nous savons qu'un arc peut supporter une charge faible notée [1] si l'arc est présent dans l'espace  $a_1 \cap a_2 \cap a_3$  et peut supporter une charge haute [3] si l'arc est présent dans l'espace  $(a_1 \cup a_2) \cap a_3$ . Par défaut, une ligne peut supporter une charge moyenne notée [2]. La figure 4.1.4 présente le graphe finale avec entre crochets les arcs présents entre deux sommets. Le problème de flot maximum à cout minimum peut alors être résolu par l'algorithme de Busacker et Gowen comme décrit dans l'exemple précédent.

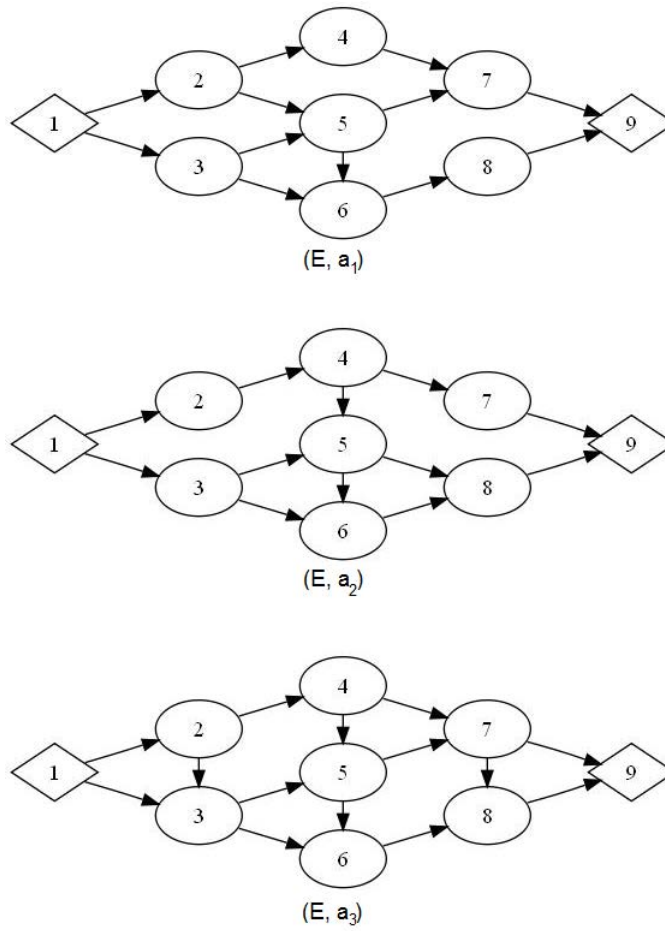


FIGURE 4.1.3 – Famille de prétopologies.

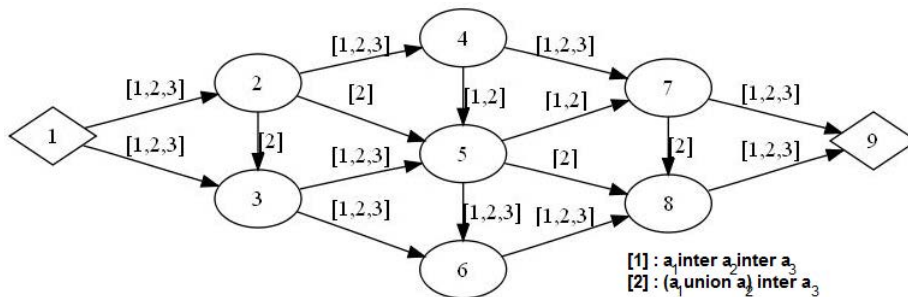


FIGURE 4.1.4 – Graphe finale.

## 4.2 Modélisation par la théorie des jeux

Les enchères utilisées dans le modèle proposé dans le chapitre 3 ne sont pas représentatif d'un réseau participatif. En effet, cela se rapproche plus d'une recherche de solution locale réalisable à l'aide d'une recherche aléatoire plutôt qu'à un optimum ayant pour objectif d'améliorer le profit de chacun ainsi que le profit global. Nous allons donc revoir tout le processus des enchères des microgrids. Il sera alors possible de distinguer des stratégies de consommation, de connaître les gains et les coûts des acteurs mais aussi de pouvoir différencier les producteurs et ainsi modéliser un réseau dont la production n'est pas centralisée sur un fournisseur unique.

Un dispositif mathématique doit, en plus, permettre de lisser la courbe et de mettre en place des stratégies de consommation, aussi appelé Demand-side Management. Ces stratégies s'intègrent dans un système de jeux.

### 4.2.1 Théorie des jeux

La théorie des jeux est un champ des mathématiques ayant pour objet d'établir et d'étudier les principes et les règles mathématiques pouvant intervenir dans l'analyse des différents types de comportement et des issues possibles lors d'une interaction stratégique entre plusieurs preneurs de décisions, appelés joueurs. Dans un grand nombre de problèmes décisionnels, au moins les deux premiers des aspects suivants sont présents :

- Il y a au moins deux preneurs de décision.
- Il y a une interaction entre les décisions dans le sens où l'issue finale pour un des preneurs de décision dépend non seulement de l'action qu'il a choisie mais aussi des actions choisies par d'autres décideurs.
- Il y a un ou plusieurs éléments d'incertitude.

Un des buts de la théorie des jeux est de créer des modèles mathématiques de base. Ces modèles essaient de synthétiser tous les éléments essentiels pour décrire l'interaction, puis d'introduire des concepts de solution pour décrire les issues possibles d'un jeu, et enfin, d'appliquer ces outils pour mieux comprendre les phénomènes sociaux mais aussi pour prédire les conséquences d'une interaction stratégique :

- Dans un marché : le prix d'un bien dépend des décisions de tous les intervenants (pouvoirs public, producteurs, consommateurs).
- En situation d'oligopole : à une demande fixée des consommateurs, ce sont les choix de tous les producteurs en compétition qui vont déterminer le prix d'un bien.
- Durant le marchandage entre acheteur et vendeur.
- Dans une enchère publique ou privée : l'issue (i.e. l'agent qui a obtenu l'objet et le prix qu'il a payé pour l'acquérir) est déterminée par les actions de tous les enchérisseurs, et aussi par le type d'enchère utilisée par l'organisateur.

Les éléments essentiels d'un jeu sont les joueurs, les actions, l'utilité et l'information. Ils sont décrits comme les règles du jeu et l'objectif est de décrire une situation grâce à ces règles donc d'expliquer ce qui arrive dans cette situation. Pour maximiser les gains, les joueurs possèdent des plans, des stratégies décrivant des actions choisies en fonction des

informations reçues. La combinaison des stratégies de chaque joueur est un équilibre. L'équilibre fournit les choix de tous les joueurs ainsi que les bénéfices du jeu [52].

#### 4.2.2 Terminologie

Avant d'expliquer les nouveaux concepts apportés à la théorie de la décision par la théorie des jeux, les termes usuels seront décrits dans cette sous-section. Tous les types de jeux ne seront pas décrits par la suite, mais seulement les notions que nous utiliserons pour la gestion de l'offre et de la demande.

**Jeux à somme nulle et jeux à somme non-nulle** : jeux dans lesquels l'intérêt de l'un des joueurs est strictement opposé à l'intérêt des autres joueurs. Si les préférences des joueurs sont représentées par une fonction de gain ou une fonction d'utilité, alors la somme des deux fonctions est toujours égale à 0. La théorie des jeux à somme nulle a été essentiellement développée par Morgenstern et von Neumann en 1944. Les échecs ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains de l'un sont exactement les pertes de l'autre.

**Information** : un jeu est à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision ses possibilités d'action, les possibilités d'action des autres joueurs, les gains résultants de ces actions, et les motivations des autres joueurs. Les jeux en information incomplète sont des situations où l'une des conditions n'est pas vérifiée, ils sont aussi appelés jeux bayésiens. Un jeu est à information parfaite si chaque joueur a une connaissance parfaite de toute l'histoire du jeu. Un jeu à information incomplète est aussi à information imparfaite. Les jeux à information complète peuvent être à information imparfaite soit du fait de la simultanéité des choix des joueurs, soit lorsque des événements aléatoires sont cachés à certains joueurs.

**Jeux coopératifs et jeux non coopératifs** : dans les jeux coopératifs, la formation de coalitions entre les joueurs est possible afin d'obtenir un meilleur résultat pour ses membres.

**Jeux simultanés et jeux séquentiels** : dans un jeu simultané, les joueurs décident en même temps de leur stratégie. Au contraire, dans un jeu séquentiel, l'ordre des décisions peut être spécifié de sorte qu'un joueur peut décider de sa stratégie conditionnellement à ce qu'ont joué les autres joueurs précédemment. Par exemple, le dilemme du prisonnier, le jeu Pierre-feuille-ciseaux sont des jeux simultanés.

**Jeux finis** : un jeu est fini lorsque l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs est fini. Le dilemme du prisonnier est un jeu fini car chacun des joueurs n'a que deux stratégies possibles. En revanche, le jeu du duopole de Cournot n'est pas un jeu fini, car chaque entreprise choisit la quantité de bien qu'elle produit dans l'ensemble des réels positifs.

**Jeux répétés** : la répétition d'un jeu, avec connaissance des résultats intermédiaires, change souvent son déroulement. Par exemple, il peut être utile de prendre ponctuellement le risque de perdre pour tester les autres joueurs, et mettre en place des

stratégies d'apprentissage par les coups joués. Il se développe également des phénomènes de réputation qui vont influencer les choix stratégiques des autres joueurs. Dans le dilemme du prisonnier, le fait de savoir qu'un joueur n'avoue jamais mais se venge cruellement, ou un joueur avoue toujours, change la stratégie optimale. Enfin, le fait que le nombre total de parties soit connu à l'avance ou non peut avoir des effets importants sur le résultat, l'ignorance du nombre de coups rapprochant du jeu avec un nombre infini de coup, alors que sa connaissance rapproche au contraire du jeu à un seul coup.

**Mémoire** : il existe aussi les jeux à mémoire parfaite et à mémoire imparfaite. Les jeux à mémoire parfaite sont des situations où chaque joueur peut se rappeler à tout moment de la suite de coups qui ont été joués précédemment, au besoin en notant au fur et à mesure les coups joués. Les jeux à mémoire imparfaite supposent une amnésie de la part des joueurs.

### 4.2.3 Jeu sous forme stratégique

Un jeu sous forme stratégique, ou jeu stratégique, se compose d'un ensemble de joueurs possédant chacun un ensemble de stratégies. Les résultats possibles du jeu sont définis par un ensemble de configurations, une configuration consistant à associer une stratégie à chaque joueur. A chacune des configurations du jeu est associé, pour chaque joueur, un gain particulier. Les joueurs sont supposés rationnels, ils cherchent à maximiser leur gain. Un jeu stratégique modélise donc une décision face à des choix stratégiques, les joueurs jouent une seule fois et de manière simultanée en pleine connaissance de toutes les informations du jeu.

**Définition 10.** Un jeu sous forme stratégique est défini par : un ensemble  $N = \{1, \dots, n\}$  de joueurs ; pour chaque joueur  $i$  un ensemble de stratégies  $S_i = \{s_1, \dots, s_{n_i}\}$ . Pour chaque joueur  $i$  une fonction de valuation  $\mu_i : S_1 * \dots * S_n \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à chaque ensemble de stratégies associe les gains du joueur  $i$ . Un jeu sous forme stratégique est un triplet ordonné :  $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (\mu_i)_{i \in N})$ .

Le déroulement d'un jeu sous forme stratégique est le suivant : simultanément, chaque joueur  $i$  choisit une stratégie  $s_i$ . Si  $s = (s_i)_{i \in N}$  est le profil de stratégies choisies, alors chaque joueur  $i$  reçoit  $\mu_i(s)$ . Le jeu et sa description sont une information commune.

**Définition 11.** Quand  $S$  est fini, on dit que le jeu est fini. Dans ce cas, le jeu peut être représenté par une matrice  $n$ -dimensionnelle où chaque case représente un profil de stratégie  $s \in S$  et contient le vecteur des paiements :  $\mu(s) = (\mu_i(s))_{i \in N}$ . Pour cette raison, les jeux finis sont souvent appelés aussi les jeux matriciels.

#### 4.2.3.1 Stratégies dominées

**Définition 12.** Une stratégie  $s_i$  est strictement dominée pour le joueur  $i$  si il existe une stratégie  $s'_i$  telle que pour tous les profils  $s_{-i} : \mu_i(s'_i; s_{-i}) > \mu_i(s_i; s_{-i})$ ,  $s_{-i}$  désigne les stratégies des joueurs sauf du joueur  $i$ .

Une stratégie  $s_i$  est faiblement dominée pour le joueur  $i$  si il existe une stratégie  $s'_i$  telle que pour tous les profils  $s_{-i} : \mu_i(s'_i; s_{-i}) \geq \mu_i(s_i; s_{-i})$ .

*Remarque.* Un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie strictement dominée. Tous les joueurs sont supposés rationnels.

Si les autres joueurs connaissent les stratégies et les paiements du joueur  $i$  et s'ils savent que le joueur  $i$  est un joueur rationnel, alors, ils peuvent tous anticiper que le joueur  $i$  ne va jamais jouer une stratégie strictement dominée. Donc, si la rationalité de chacun des joueurs est une connaissance commune, chacun est rationnel, chacun sait que les autres sont rationnels, chacun sait que les autres savent qu'il est rationnel, alors une stratégie strictement dominée peut être éliminée.

*Remarque 6.* Ainsi, sous l'hypothèse de connaissance commune de rationalité et du jeu, un bon concept de solution doit exclure toutes les stratégies strictement dominées. La rationalité et le jeu sont une connaissance commune entre les joueurs.

#### 4.2.3.2 Équilibre dans un jeu

L'équilibre est un concept de solution pour les jeux non coopératifs. Si aucun joueur n'a intérêt à changer individuellement sa stratégie en connaissant les stratégies choisies par les autres joueurs alors le profil des stratégies est appelé un équilibre de Nash. C'est à dire qu'un équilibre de Nash se définit comme une configuration du jeu où une déviation unilatérale d'un joueur entrainerait une diminution du gain de ce joueur.

**Définition 13.** Un jeu peut être solvable par élimination itérative des stratégies dominées. Quand ce procédé converge vers un unique résultat, ce résultat est alors la solution du jeu.

**Définition 14.** Un équilibre de Nash est un profil de stratégies  $s^* = \{s_1^*, \dots, s_n^*\}$  tel que pour tout joueur  $i$ , pour toute stratégie  $s'_i \in S_i : \mu_i(s_1^*, s_{-i}^*) \geq \mu_i(s'_i, s_{-i}^*)$ .

**Définition 15.** La fonction de meilleure réponse du joueur  $i$  est la fonction  $B_i$  qui associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs  $s_{-i}$  les stratégies du joueur  $i$  qui maximise son utilité :  $B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \text{ t.q. } \mu_i(s_i, s_{-i}) \geq \mu_i(s'_i, s_{-i}) \forall s'_i \in S_i\}$ .

Un équilibre de Nash est un profil  $s^*$  tel que la stratégie du joueur  $i$  est une meilleure réponse :  $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*) \forall i \in N$ .

**Proposition 1.** Si le jeu est solvable par élimination répétée de stratégies faiblement dominées, alors le vecteur de stratégies qui en résulte est un équilibre de Nash du jeu initial.

*Démonstration.* Après l'élimination d'une stratégie faiblement dominante, un équilibre du jeu réduit est aussi un équilibre du jeu initial. Par récurrence, nous arrivons à un équilibre de Nash □



### 4.2.3.3 Critère de Pareto

L'optimum de Pareto consiste à se trouver dans une situation telle que toute amélioration du bien-être d'un individu ou d'une catégorie d'individus ne peut se faire qu'au détriment d'un autre individu ou d'une autre catégorie d'individus. Dit autrement, l'optimum de Pareto est une situation où toute l'allocation initiale a été partagée. À ce titre, c'est une situation de référence de la théorie économique.

**Définition 16.** Préférence au sens de Pareto  $>_P$  entre les états des agents d'un jeu :

$$(u_1, \dots, u_n) >_P (u'_1, \dots, u'_n) \text{ ssi } \forall i \in [1, n]$$

L'optimum de Pareto est maximum de cette relation telle qu'il n'est pas possible d'augmenter le gain d'un agent sans diminuer celui d'un autre.

L'exemple du dilemme du prisonnier de la figure 4.2.1 montre qu'un équilibre de Nash peut être Pareto-dominé. Autrement dit, même si aucun des joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement dans la configuration *(Confess, Confess)*, ils peuvent donc profiter d'une déviation simultanée vers la configuration *(Lie, Lie)*.

		PRISONER 2	
		Confess	Lie
PRISONER 1	Confess	-8, -8	0, -10
	Lie	-10, 0	-1, -1

FIGURE 4.2.1 – Le dilemme du prisonnier.

Pourtant la recherche d'un tel optimum n'est pas nécessairement juste d'un point de vue social ou environnemental. Lors de la recherche de l'optimum se déroulant dans le cadre strict des échanges marchands, certains effets qui ne sont pas affectés d'une valeur, sont complètement écartés de la recherche d'efficacité. C'est précisément le cas lorsque la dimension particulière que constitue l'environnement est occultée. Ce sont des effets externes, sous-entendus à l'échange marchand, aussi appelé externalités.

Par exemple, une entreprise produit de l'électricité à partir de charbon. Elle fournit son électricité à un certain prix à ses consommateurs. Si elle peut se fournir en charbon à un prix inférieur, elle pourra répercuter cette baisse sur son prix de vente. Or ce charbon est moins cher car il est de moins bonne qualité. La combustion de ce charbon de mauvaise qualité, s'il permet une amélioration du bien-être des consommateurs par la réduction du prix, se traduit par une baisse de la qualité de l'environnement. Cette baisse n'est pas naturellement intégrée à l'échange marchand. Il faut la réintégrer, i.e. internaliser les effets externes, ces derniers créant des inefficacités. En simplifiant la formulation, il est nécessaire d'inclure dans les prix les dégradations environnementales qui, sinon, seraient ignorées. Ce travail dans le domaine de l'économie est effectué en collaboration avec

Patrick Schembri, directeur du Département de Sciences Économiques de l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines.

## 4.3 Jeux et stratégies de consommation

La gestion du côté du consommateur, appelé Demand-Side Management (DSM) a pour objectif d'augmenter l'efficacité de génération en décalant ou permutant la consommation dans des zones de basses consommations [49]. De nombreux appareils peuvent temporairement se mettre en veille ou le début de consommation peut être reporté. Certains appareils sont aussi capables d'arrêter de consommer durant leur fonctionnement. Environ 50% de la consommation des zones résidentielles peut être contrôlée sans réduire le confort, par exemple les réfrigérateurs ou les machines à laver [9]. Le DSM s'est grandement développé après la crise énergétique pétrolière de 1973 et 1979. Les services publics de la Californie ont utilisé de tels programmes pour tenir la consommation d'énergie par habitant à peu près constant au cours des 30 dernières années.

La gestion de la demande d'énergie ou DSM, est la modification de la demande d'énergie des consommateurs par diverses méthodes telles que des incitations financières, la gestion de la domotique, ou l'éducation des consommateurs. De nos jours, les technologies DSM devrait se multiplier en raison de l'intégration de l'information et de la technologie des communications dans les bâtiments. Habituellement, l'objectif de la gestion de la demande est d'encourager le consommateur à utiliser moins d'énergie aux heures de pointe et de ne pas dépenser de l'énergie en vain. Il est à noter que la gestion n'a pas pour objectif de réduire la demande, mais d'aplanir la courbe de charge. Un exemple est l'utilisation d'unités de stockage d'énergie pour stocker l'énergie pendant les heures creuses et les décharger pendant les heures de pointe.

### 4.3.1 Gestion de l'énergie

Le réseau électrique doit évoluer et incorporer des technologies permettant aux clients de prendre part au choix de leur consommation d'énergie. La domotique permet de régler à la fois le temps et la quantité de la consommation énergétique, ainsi que de pouvoir planifier la consommation future. La DSM promet des avantages de coûts à la fois au niveau du client, mais aussi au niveau du producteur et de l'émission en gaz à effet de serre dû aux centrales d'appoint. Les programmes de DSM comprennent deux activités principales :

- Demande-réponse ou Déplacement de la charge : le principe est de réduire la demande en période de pointe et de l'augmenter en période de creux afin de niveler la courbe de charge. Les programmes de demande-réponse gère à la fois le producteur et le consommateur, afin d'équilibrer l'offre et la demande. Ils planifient les étapes dans le futur afin de connaître les stratégies à suivre.
- L'efficacité énergétique et la conservation : l'incitation gouvernementale de ne pas gaspiller d'énergie est une part de l'efficacité énergétique. Mais le client a droit à un confort de vie sans pour autant se sentir harceler sur la manière de vivre chez soi.

C'est pourquoi les nouveaux appareils de type domotique peuvent être programmés en avance afin de correspondre à leur bien-être. Par exemple, les clients peuvent choisir leur température intérieure idéale, ou s'ils veulent ou non participer à un programme social énergétique. L'aspect social reste très aléatoire et les résultats difficilement visible et quantifiable.

McKinsey a déduit à travers ses travaux, résumés par Davito [15], que les programmes de DSM intègrent tout ou partie des six leviers suivants : le prix ou plus généralement la tarification, l'incitation, l'information, le contrôle, l'éducation et la connaissance. Analysons les six piliers dans le but d'une intégration au modèle proposé :

1. **Prix.** La gestion des prix se fait en temps discret sur un court intervalle. Les tarifs de consommation sont basés sur les coûts de production, c'est pourquoi l'énergie est bien plus élevée lors des pics de consommation. Ceci est dû à l'utilisation supplémentaire des centrales à énergie fossile. Bien que le coût soit nettement inférieur aux énergies renouvelables, leur utilisation est limitée à cause de l'émission de gaz à effet de serre dans l'atmosphère. Les tarifs dépendent aussi du type d'utilisateur, que ce soit un petit consommateur domestique ou une grande usine. En vue d'une utilisation intelligente, le coût de l'énergie doit aussi dépendre de la participation du consommateur au DSM. Si le coût global est inférieur, ce n'est pas pour autant que tous les consommateurs seront récompensés, car cela ne serait pas représentatif de l'effort fourni. Le coût de l'énergie dépend donc à la fois de son coût de fabrication, mais aussi des efforts des stratégies de DSM. La différence entre le coût sans gestion et le coût avec gestion doit donc récompenser les consommateurs en fonction de leur participation.
2. **Incitation.** Les simulations permettent de connaître l'influence d'une nouvelle technologie dans un Smart Grid ou de connaître le comportement d'une configuration de Smart Grid à toute échelle.
3. **Information.** Les informations circulent sur un court intervalle à travers le Smart Grid. De plus, tous les programmes ou algorithmes de gestion énergétique se basent sur un consensus au niveau national. Une gestion uniquement locale n'apportera aucun bienfait au niveau global, et inversement. Tout le réseau doit posséder une gestion de l'offre et de la demande pour être efficace. De plus, il est possible de modifier certaines variables afin de connaître son impact dans le comportement du Smart Grid.
4. **Contrôle.** Il n'y a pas de stratégies déterminées pour les batteries et les véhicules électriques. Néanmoins, il est possible d'incorporer n'importe quel type de nouvelle stratégie tant que les critères d'entrée au niveau local sont respectés, i.e. la consommation et la priorité. S'ils sont producteurs, ils sont considérés comme énergie renouvelable locale et leur production est directement soustraite à la consommation obligatoire (de priorité 0 ou 1). En cas de surproduction, il est possible au niveau microgrid de distribuer l'énergie à tous les autres niveaux locaux moyennant tarification de la transaction. Ainsi, aucun consommateur n'est avantagé et tout le monde y gagne.

5. Éducation. Le modèle n'a aucune influence sociale.
6. Connaissance. Les courbes de productions, de consommation, ainsi que les gains énergétiques et monétaires sont connues à tout niveau. Des stratégies de prix, de pronostiques et de planifications sont possibles grâce à la transparence des données.

### 4.3.2 Jeux au niveau des microgrids

Afin de comprendre l'intérêt de la théorie des jeux dans la résolution du microgrid, nous allons reprendre l'exemple des cinq maisons du chapitre 3.

**Exemple.** Prenons 5 maisons et deux microgrids, les deux premières maisons appartiennent au premier microgrid, et les trois suivantes au deuxième microgrid. Dans l'ordre, les valeurs sont la consommation, la priorité et l'utilité de l'appareil :  $conso_e/\rho_e/u_e$  pour chaque appareil de la maison,  $u_e = (conso_{max} * \rho_{max}) - (conso_e * \rho_e) + conso_e$ .  $Fc$  représente l'énergie prévue pour cette itération, d'après les pronostics, et  $conso_{min}$  la consommation minimale de la maison.

	Maison1	Maison2	Maison3	Maison4	Maison5
Appareil 1	1/0/81	1/0/16	1/0	1/0/33	1/0
Appareil 2	1/1/80	1/0/16	1/0	1/1/32	3/0
Appareil 3	3/0/83	2/1/15	10/0	3/0/35	
Appareil 4	5/2/75	3/0/18		3/2/29	
Appareil 5	20/4/20	4/3/7		4/1/32	
Appareil 6		5/3/5		8/4/8	
Fc	4	6	12	8	6
conso <sub>min</sub>	5	7	12	9	4

Dans le cadre du modèle, les stratégies suivantes sont utilisées (les utilités dépendant des tests, seul le principe sera donné) :

1. Consommation de base : chaque combinaison d'appareil fournit une stratégie de consommation, l'utilité  $l$  du consommateur, de la stratégie utilisant  $k$  appareils est la suivante :  $l = \sum_{i=1}^k \frac{u_i * conso_i}{\rho_i}$  ; l'utilité  $r$  du producteur, de la stratégie utilisant  $k$  appareils est la suivante :  $r = \sum_{i=1}^k \left( \frac{u_i}{\rho_i} - \Lambda \right) * conso_i$  avec  $\Lambda = \frac{\sum u_i conso_i}{\sum conso_i}$  pour chaque maison c'est à dire l'utilité moyenne d'une unité de consommation dans la maison. Ces calculs sont utilisés à titre d'exemple et sont représentatif de l'intérêt d'utilisation des appareils en comparant les couts par unité de consommation de l'appareil au cout par unité moyen. Une autre possibilité serait d'utiliser l'écart-type.
2. Peak shaving : la priorité a un impact inversement proportionnel sur l'utilité  $l$  et  $r$ . Les appareils grand consommateur augmente l'utilité si leur priorité est augmentée.
3. Conservation : les utilités des appareils possédant des batteries sont grandement augmentées.

4. Load shifting : l'utilité dépend d'un consensus entre deux microgrids, un micro-grid acceptant d'offrir une partie de sa consommation à l'autre afin d'éviter une congestion.
5. Surproduction : l'utilité des appareils possédant des batteries sont augmentés, ainsi que l'utilité des autres appareils en fonction de leur priorité.
6. Sous-production : l'utilité de tous les appareils, en fonction de leur priorité, est diminué, les appareils possédant des batteries fournissent de l'énergie si possible.

**Exemple.** Afin de rendre l'exemple lisible, les stratégies utilisées pour les enchères seront des stratégies de type 1, basées sur la limite maximale de la priorité de fonctionnement des appareils à fournir. La stratégie choisie est celle dont la somme  $l + r$  est la plus grande.

Priorité	Maison1	Maison2	Maison3	Maison4	Maison5
0	330/194	77/27		138/47	
1	410/240	<b>107/37</b>		298/56.5	
2	<b>620/257</b>			<b>341/32.5</b>	
3		125/-36			
4	720/-322			357/-131	
5					
Enchère	10	7	12	12	4

La suite du processus par problème de sac à dos est identique au chapitre 3.

## 4.4 Régulation de la courbe de consommation

De nos jours, l'électricité consommée par les zones résidentielles provient des centrales énergétiques. Un des objectifs du Smart Grid est de niveler et réguler la courbe de consommation, donc la production. Cette opération ne pouvant se faire au niveau local, un contrôleur global doit maintenir cette fonctionnalité. En effet, les niveaux locaux ou microgrids n'ont aucune vision de la répartition de l'énergie dans le système. Seul le gestionnaire de réseau est capable d'avoir une vue d'ensemble.

### 4.4.1 Limitation des variations

Un lissage de la courbe peut se voir comme une limitation de la variation de l'énergie produite lors de deux laps de temps consécutifs. Notons  $F$  la fonction définissant la charge énergétique totale, représentant la courbe de charge. La pente entre les instants  $t_k$  et  $t_{k+1}$  est donnée par  $\frac{F_{k+1}-F_k}{t_{k+1}-t_k}$ . L'objectif est donc de limiter cette pente en valeur absolue. Mais ce résultat ne prend pas en compte l'évolution de la courbe, c'est pourquoi il est préférable d'étudier la régularité de la courbe. Il faut donc minimiser :  $\frac{F_{k+2}-F_{k+1}}{t_{k+2}-t_{k+1}} - \frac{F_{k+1}-F_k}{t_{k+1}-t_k} = \frac{F_{k+2}-2F_{k+1}+F_k}{t_{k+1}-t_k}$ .

Cependant, lors de l'optimisation d'une fonction-objectif, la résolution d'un problème dont les différents variables ne sont pas liés peut mener à des résultats non attendu. Par

exemple, nous cherchons à minimiser  $x + y$  tel que  $x + y \geq 2$  et  $x, y \geq 0$ . Il est donc possible que soit  $x$  soit  $y$  atteigne leur valeur minimale alors que le résultat est optimal. Afin de ne favoriser aucune variable, nous cherchons à minimiser la norme.

#### 4.4.2 Utilisation de la norme

Rappelons la définition des normes :

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_m = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^n |x_i|^m}$  et  $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$  avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Nous obtenons donc les fonctions suivantes pour la pente et la régularité :

	$\ \cdot\ _m^m$	$\ \cdot\ _\infty$
Pente	$\sum_{i=1}^n  f_{k+1} - f_k ^m$	$\max_{i \in \{1, \dots, n\}}  f_{k+1} - f_k $
Régularité	$\sum_{i=1}^{n-1}  f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k ^m$	$\max_{i \in \{1, \dots, n-1\}}  f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k $

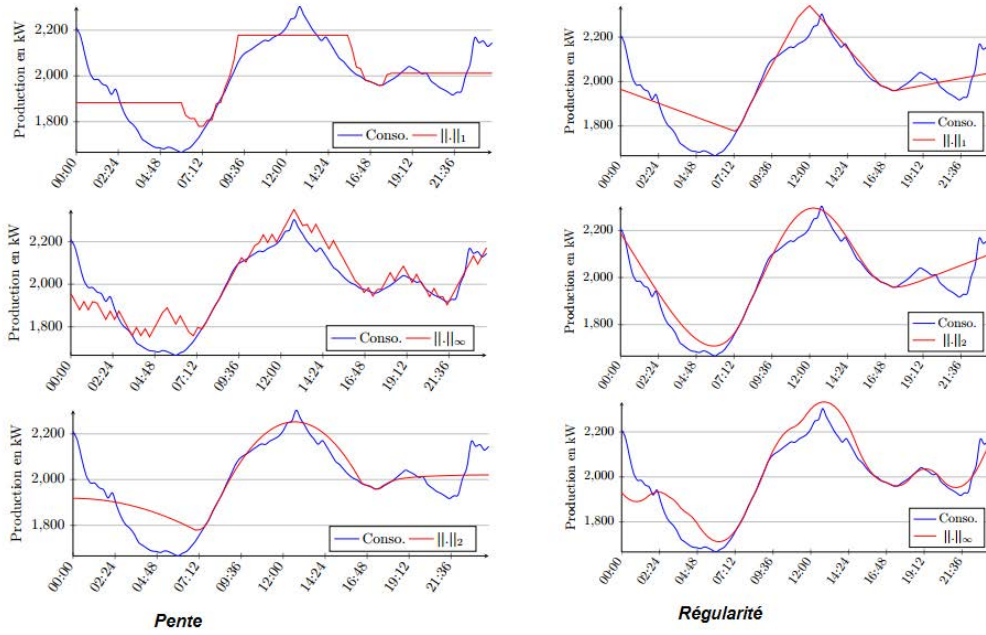


FIGURE 4.4.1 – Impact des normes de la pente et de la régularité sur la courbe de charge classique.

La figure 4.4.1 présente la courbe de charge standard et la courbe définie par une norme de cette dernière. Il semble que les fonctions-objectifs basées sur la régularité tendent bien à éviter les cassures brutes de pentes. Seulement ces optimisations sont sources de très fortes pentes qui durent dans le temps et collent beaucoup à la courbe de

production ce qui n'est que peu satisfaisant en raison de leurs pics. Il suffit de comparer les optimisations sur la fin de journée pour voir que les fonctions-objectifs basées sur les régularités y sont beaucoup plus efficaces.

Au niveau du modèle, nous avons les données de  $F_k, F_{k+1}$  (représentant les données en  $i-1$  et  $i$ ) et de l'intervalle de temps, l'objectif est de trouver  $F_{k+2} = F(x)$  tel que la norme 2 de la régularité soit minimale, nous considérons  $F_k$  et  $F_{k+1}$  connus,  $F_k - 2F_{k+1} = F(y)$  :

$$\begin{cases} \text{minimize} & \|F(x) - F(y)\|_2^2 \\ \text{subject to} & x \in D \end{cases}.$$

### 4.4.3 Application lipschitzienne

Le problème de minimisation précédent n'offre pas toujours un bon consensus entre les divers agents du Smart Grid et des pics ponctuels peuvent apparaître même en optimisant notre problème de régularité. Dans le cadre d'un Smart Grid à un niveau national, il n'est pas toujours possible de trouver une solution optimale dans l'intervalle de temps de cinq minutes. Afin de toujours pouvoir fournir un lissage de la courbe, nous devons donc autoriser le choix d'un optimum local. Nous devons donc fournir une analyse mathématique permettant de qualifier la qualité de l'optimum.

Une application lipschitzienne est une application possédant une certaine propriété de régularité qui est plus forte que la continuité. Intuitivement, c'est une fonction qui est limitée dans sa manière d'évoluer. Tout segment reliant deux points du graphe d'une telle fonction aura une pente inférieure, en valeur absolue, à une constante appelée constante de Lipschitz.

**Définition 17.** Soient  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $k$  un réel positif. On dit que  $F$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\forall (x, y) \in E^2, |F(x) - F(y)| \leq k |x - y|$ .

Dans la figure 4.4.2, la fonction réelle est  $k$ -lipschitzienne si le double cône blanc peut se déplacer le long de son graphe sans jamais avoir avec elle d'autre contact qu'au point central. Plus  $k$  est petit, plus le cône s'élargit et moins la fonction peut être abrupte. Dans le cadre du lissage de courbe, nous avons  $F(x)$  et  $F(y)$ ,  $|x - y|$  représente l'intervalle de temps pris en compte. Des tests doivent être effectués sur le modèle afin de déterminer le choix de  $k$  et de l'intervalle de temps à appliquer.



FIGURE 4.4.2 – Application  $k$ -lipschitzienne.

## Conclusion : évaluation des bénéfices économiques

Le Smart Grid fournit l'échelle et l'évolutivité pour rendre le DSM efficace et pratique. Des essais sont déjà d'actualité comme les compteurs intelligents, ils permettent aux maisons de connaître leur consommation et le coût en temps réel. Mais de nouvelles structures de communications, de normalisation des technologies doivent être mises en place avant de pouvoir élever le Smart Grid au niveau national voir international.

Comme toute décision d'investissement dans la technologie, les bénéfices doivent dépasser les coûts. Faire l'analyse de la valeur des investissements de réseau intelligent est compliquée par au moins deux caractéristiques. Premièrement, les actifs du réseau contribuent à plus d'un flux de valeur. Faire une détermination de la valeur des investissements de réseau intelligent nécessite généralement la reconnaissance et la comptabilisation des avantages de multiples flux de valeur pour compenser les coûts d'investissement dans le déploiement de la technologie. Deuxièmement, plusieurs de ces chaînes de valeur peuvent être difficiles à quantifier financièrement. La fiabilité est traditionnellement fixée par la réglementation comme un coût nécessaire afin de fournir de l'électricité. De plus, déterminer la valeur de l'impact environnemental et d'assurer la santé et le bien-être de la population sont des domaines où les avantages de l'investissement de réseau intelligent sont difficiles à quantifier dans les équations simples [51]. Néanmoins, il est possible de mesurer le niveau de bénéfices à l'aide des courbes de consommation du Smart Grid par rapport aux courbes standard. En effet, les courbes de consommation sont connues et utilisées depuis de nombreuses années pour planifier la production quotidienne.

Au niveau local, la consommation brute, i.e. la consommation sans l'aide d'une technologie de contrôle ou d'énergie renouvelable utilisée localement, est comparée à la consommation nette, i.e. la consommation dans le Smart Grid. Le coût de l'énergie renouvelable, locale ou via une centrale, est approximable. La différence entre le coût de la consommation brute et la consommation nette plus le coût des technologies utilisées offre un premier aperçu des bénéfices possibles.

De même, le coût des installations de combustible ou d'autres centrales utilisées au cours de la consommation de pointe est approximable. Le coût moyen d'un courant énergétique de sortie est approximable, dans le cas d'un réseau moderne, et dans un réseau intelligent (voir figure 4.4.3).

Il est aussi possible de mesurer les gains possibles dans le cas d'un ajustement du modèle. Les résultats du modèle sont comparés au résultat du modèle mathématique, pour cela, des outils de résolution sont développés afin de connaître le résultat optimal global en un intervalle de temps raisonnable. Ainsi, les processus d'apprentissage peuvent ajuster les modèles mathématiques internes aux Smart Grids dans le but d'approcher le plus possible de la valeur optimale.



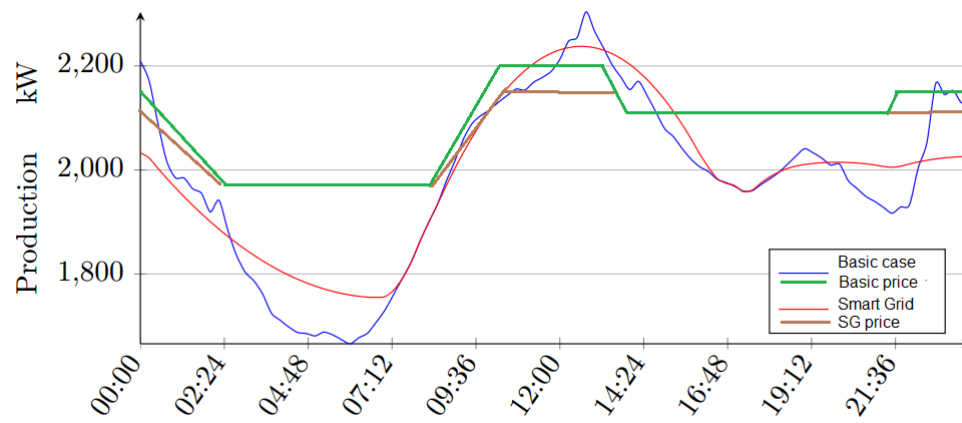


FIGURE 4.4.3 – Impact de la gestion sur le cout de l'énergie.

## Chapitre 5

# Outils d'optimisation mathématique

Afin d'améliorer le Smart Grid, nous avons besoin d'outils mathématique pour déterminer la solution optimale pour une configuration donnée. Cette dernière servira de référence pour notre modèle, les paramètres sont modifiés pour tendre vers cette valeur.

Faire du mieux possible est un critère d'évolution naturelle. Les mots optimiser, optimisation sont supposés refléter cette idée du mieux possible. Dans la vie courante, les choix possibles se limitent souvent à une alternative ou quelques possibilités, de sorte que l'algorithme de prise de décision se réduit à envisager toutes les possibilités, à considérer et à évaluer leurs conséquences probables, et à retenir la meilleure. De plus, cette notion de meilleur n'a pas de sens tant que le critère de choix n'a pas été explicité.

Dans les problèmes mathématiques, les choix possibles sont souvent nombreux voir infini et une énumération exhaustive des possibilités de choix est impensable. Il faut alors un algorithme plus performant, une méthode pour trouver la solution optimale en explorant le moins de solutions moins bonnes possible. Il faut donc savoir caractériser la solution optimale. Les mots optimiser ou optimisation sont bien souvent galvaudés dans le langage courant dans la mesure où ils sont utilisés dans le sens d'une simple amélioration par rapport à un état antérieur.

L'optimisation comporte trois points fondamentaux. Le premier est l'art de formuler des problèmes de décision grâce à des concepts et outils mathématiques précis : Que mettre dans la fonction objectif ? Que mettre dans les contraintes ? Comment formuler ces contraintes ? Quelles informations peut-on déduire de la solution optimale ? Autant de questions cruciales dans l'obtention de la solution optimale. Le deuxième est la théorie mathématique. Il est facile de définir une solution optimale, mais il est plus difficile de la reconnaître. Il faut donc savoir caractériser une solution par des conditions nécessaires, suffisantes, ou les deux, connaître certaines de ses propriétés. Le troisième est l'algorithmique. Une fois que la solution est caractérisée, elle doit être calculée. Il n'est pas possible de passer en revue tout ce qui est imaginable ou autorisé ; il s'agit d'aller au plus vite vers la solution en améliorant par touches successives une ébauche de celle-ci.

## 5.1 Problème d'optimisation

Un problème d'optimisation ( $P$ ) consiste, étant donnée une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , à trouver : son minimum  $v$  (ou son maximum) dans  $S$  tel qu'il existe un point satisfaisant l'égalité suivante :  $\bar{x} \in S \mid f(\bar{x}) = v$ .

*Remarque 7.* Notation :  $f$  est la fonction objectif ;  $v$  la valeur optimale ;  $x_0$  la solution optimale ;  $S$  l'ensemble de solutions réalisables. Le problème s'écrit alors  $\min_{x \in S} f(x)$  (resp. max). On le note :

**Définition 18.**

$$(P) \begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in S \end{cases}$$

*Remarque 8.* Tout programme de minimisation peut être transformé en programme de maximisation :  $\min f(x) = -\max -f(x)$ .

**Définition 19.** En optimisation non linéaire, il existe trois types de problèmes :

1. Problème sans contraintes :  $\min_{x \in S} f(x)$
2. Problèmes avec contraintes de types égalités :  $\min_{x \in S} f(x)$  avec  $S$  de la forme  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0 \text{ pour } i = 1 \dots l\}$  avec  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
3. Problèmes avec contraintes de types inégalités :  $\min_{x \in S} f(x)$  avec  $S$  de la forme  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i = 1 \dots l\}$  avec  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dans un espace à deux dimensions, il est facile de résoudre le problème par résolution graphique. Afin de pouvoir décrire les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation, nous rappelons quelques définitions et théorèmes.

**Définition 20.** Soient  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le produit scalaire de  $x, y$  est noté  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1 \rightarrow n} x_i y_i = x^T y$ .

**Définition 21.** Norme euclidienne. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . La distance entre deux points  $x$  et  $y$  est  $d(x, y) = \|x - y\|$ , il s'agit de la norme 2.

### 5.1.1 Conditions d'optimalité classiques

Les conditions d'optimalité sont un ensemble d'équations, d'inéquations et d'expressions diverses vérifiées par une solution d'un problème d'optimisation ou qui permettent d'affirmer qu'un point qui les vérifie est solution du problème d'optimisation considéré. Dans le premier cas, il s'agit de conditions nécessaires. Dans le deuxième cas, de conditions suffisantes d'optimalité. Cette sous-section se limite aux conditions d'optimalité des problèmes d'optimisation différentiable et de dimension finie.

On parle de conditions du premier ordre si ces conditions font intervenir les dérivées premières des contraintes du problème, et de conditions du second ordre si ces conditions font intervenir les dérivées secondes des contraintes définissant le problème. Les

conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation avec contraintes introduisent des variables cachées, les multiplicateurs ou variables duales, qui n'apparaissent pas dans l'énoncé du problème et qui sont donc difficiles à appréhender ; elles appartiennent à un autre espace que celui des variables à optimiser. Elles jouent cependant un rôle crucial dans la compréhension du problème, notamment parce qu'elles s'interprètent comme des coûts marginaux, très utiles en pratique. Nous présenterons la résolution des problèmes sans contraintes, et avec des contraintes d'égalités puis d'inégalités :

1. Lorsqu'une fonction atteint un minimum en un point, elle varie peu dans le voisinage de ce point. Mathématiquement, cette observation se traduit par le fait que sa dérivée en ce point est nulle. Ceci est une condition d'optimalité du premier ordre pour un problème sans contrainte. Les conditions de second ordre du problème sans contrainte, basé sur la matrice Hessienne ou matrice des dérivées secondes permet de qualifier la nature des points.
2. La méthode des multiplicateurs de Lagrange ou extrema liés permet de trouver les points stationnaires d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contraintes égalités [7].
3. Les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) permettent de trouver la solution d'un problème possédant des contraintes égalités et inégalités. Ces conditions généralisent la méthode des multiplicateurs de Lagrange [27].

### 5.1.2 Problème de maximisation convexe ou minimisation concave

**Définition 22.** On dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  est convexe si, pour tout  $x$  et tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a :  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ . Si l'inégalité est stricte, on dit que  $f$  est strictement convexe (voir figure 5.1.1).

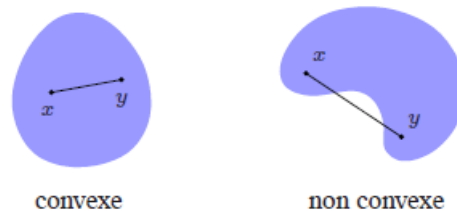


FIGURE 5.1.1 – Ensemble convexe et concave.

**Théorème 3.** Si  $f$  est convexe et admet un minimum local en  $\bar{x}$ , alors  $f$  admet un minimum global en  $\bar{x}$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $x$  vérifiant  $f(x) < f(\bar{x})$ . Pour  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a :  $f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) < f(\bar{x})$ .

La fonction  $f$  ayant un minimum local en  $\bar{x}$ , il existe une sphère  $S$  centrée en  $\bar{x}$  à l'intérieur de laquelle la fonction  $f$  est supérieure ou égale à  $f(\bar{x})$ . Quand  $\lambda$  tend vers 0,

$\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}$  tend vers  $\bar{x}$ , ce point appartient à  $S$  ce qui entraîne  $f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \geq f(\bar{x})$ . On obtient une contradiction avec la précédente égalité.  $\square$

**Définition 23.** Un problème  $(P)$  est une minimisation convexe si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Le problème est une minimisation.
- La fonction-objectif  $f$  est convexe.
- La fonction de la contrainte  $g$  est convexe.
- Le domaine  $D$  est convexe.

Le problème est non convexe si une des conditions au-dessus n'est pas satisfaite. Nous parlons de maximisation convexe lorsque le premier ou le deuxième point est violé.

Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine convexe fermé tel que  $\text{int } D \neq \emptyset$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Lorsqu'un minimum est trouvé, il s'agit d'un minimum local, mais pas toujours global. Dans la littérature, une maximisation convexe, ou problème de minimisation concave s'écrit de la façon suivante [34] :

$$\begin{cases} \text{maximize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in D \end{cases}$$

Les premières approches algorithmiques de ce problème sont résumées dans le livre de Rockafellar [54], il est dit que la théorie sur la maximisation d'un problème convexe dans un domaine convexe présente des particularités différentes que dans le cas de la minimisation. Plusieurs états de l'art et algorithmes sur le problème de la maximisation convexe sont disponible dans des livres de Horst et al. [31, 33, 34].

### 5.1.3 Condition d'optimalité par l'espace de Lebesgue

Avant de parler de la maximisation convexe, rappelons les conditions d'optimalité d'une minimisation convexe :

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in D \end{cases} \quad (\text{a})$$

avec  $f$  convexe et le domaine  $D$  convexe.

Si  $f$  est différentiable, nous avons les conditions d'optimalité classiques déduit du cône normal au point  $y$ , les conditions de premier ordre sont :

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x \in D$$

**Définition 24.** Espace de Lebesgue de  $f$  en  $\alpha$ .  $\mathcal{L}_f(\alpha) = \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ .

Nous pouvons remarquer que  $\mathcal{L}_f(f(y))$  est l'ensemble de points meilleurs que  $y$  pour la minimisation. Nous pouvons donc réinterpréter les conditions d'optimalité :

$y = \text{argmin}(a)$  si et seulement si  $\mathcal{L}_f(f(y)) \cap D = \{y\}$ .

C'est à dire que  $y$  est solution du problème d'optimisation (a) s'il n'y a pas de point meilleur que  $y$  dans le domaine  $D$ . Dans le cas de la maximisation, les points se situant dans l'espace de Lebesgue sont pire que  $y$ . Il est maximum global si et seulement si tous les points du domaines sont pires que  $y$ , c'est à dire :  $D \subset \mathcal{L}_f(f(y))$ .

minimisation convexe	maximisation convexe
séparation de $D$ et $\mathcal{L}_f(f(y))$	inclusion $D \subset \mathcal{L}_f(f(y))$

Il est a noté que vérifier l'inclusion d'un ensemble à un autre est bien plus difficile que de vérifier la séparation entre deux ensembles. Il existe divers résultats pour la recherche de l'inclusion [54, 57]. Ce résultat sera utile pour qualifier une solution du problème.

## 5.2 Maximisation convexe

Cette section est basé sur les travaux de : Floudas and Pardalos [47], Horst and Tuy [34], Pardalos and Rosen [48]. Nous résumerons les principales méthodes pour la résolution du problème de maximisation convexe.

Les méthodes d'optimisation présente un rôle important dans de nombreux autres champs de l'optimisation globale. En effet, de nombreux problèmes peuvent être transformés en un problème dont la fonction objectif est une somme de fonctions concaves ou convexes. Il est facile de construire une fonction convexe ou un polytope dont chaque sommet soit un minimum local. Dans le but de fournir une solution aux problèmes, les algorithmes de résolution considèrent les contraintes comme un polyèdre des solutions  $D$ , un ensemble convexe définie par un nombre fini d'inégalités.

### $\gamma$ -extension

Considérons un point quelconque  $y$  dans l'intérieur de  $D$ , alors nous savons qu'il existe des points dont la valeur est supérieur, et d'autre dont la valeur est inférieur. Nous cherchons à identifier la partie de  $D$  dont les points sont moins optimaux que  $y$ .

### Énumération des sommets

Il est possible d'effectuer une approximation externe de  $D$  par un polytope  $P \supset D$  donc les sommets  $V(P)$  sont connus. Notons  $v^*$  un sommet de  $P$  tel que :

$$f(v^*) = \max\{f(v) : v \in V(P)\} = \max\{f(x), x \in P\}$$

Nous avons donc une borne inférieur  $f'(v^*) \geq \max\{f(x), x \in D\} = f(x^*)$ . Si  $v^* \in D$ , alors le sommet maximise  $f$  sous contraintes. Sinon, soit  $z$  un point intérieur de  $D$ ; l'intersection  $y$  entre le segment  $[z, v^*]$  avec les frontières de  $D$  donne une approximation d'une solution faisable.

## Énumération des facettes

L'énumération des facettes est une variante de l'énumération des sommets. L'un est le dual de l'autre via les notions de cônes.

## Partitions polyédrales

L'objectif est de simplifier un problème par des objets complexes en un certain nombre de sous-problèmes portant sur des objets simples. Nous cherchons donc à diviser un polyèdre en un nombre fini de formes simples. Il est préférable de diviser en une partition de simplexe, de cônes ou de rectangle, en préservant si possible la forme du polyèdre initiale.

## 5.3 Analyse mathématique du Smart Grid

### 5.3.1 Problème de Sac à dos

**Définition 25.** Le problème du Sac à Dos représente une situation dans laquelle une personne dispose de  $n$  objets d'utilité  $u_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et d'un poids  $w_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et d'un sac de capacité maximale  $W > 0$ . Le problème est de trouver un ensemble d'objets dont la somme des utilités est maximale. Il faut donc trouver un sous-ensemble d'objets  $X$  tel que  $\sum_{x \in X} w_x \leq W$  et qui maximise  $\sum_{x \in X} u_x$ .

Le problème d'un point de vue global est similaire au problème local défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{maximize} & \sum_{i=1}^n x_i u_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1 \rightarrow n \end{cases}$$

où  $x_i = 1$  si l'objet  $i$  est utilisé, 0 sinon. Dans le cas du Smart Grid, le poids est la consommation en énergie et la taille du sac l'énergie disponible. A chaque intervalle de temps  $T$ , un nouveau problème de sac-à-dos est attribué à la nouvelle configuration.

Le problème doit en plus répondre à de nombreuses contraintes propres aux Smart Grid comme les contraintes du problème de flot maximum (le problème de flot max cout min avec palier de capacité est bien plus complexe à modéliser mathématiquement) :

1. Problème du flot maximum :  $\max \sum_{i=1}^n x_i w_i$ . Ce problème admet une solution réalisable dans la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$ .
2. La loi de conservation des flux : la somme des flots entrants est égale à la somme des flots sortant en un nœud du graphe  $\sum_{k \in \Gamma^-} a_i^k w_i = \sum_{k \in \Gamma^+} a_i^k w_i$ , avec  $a_i^k$  la proportion de la consommation de l'élément  $i$  passant par l'arc  $k$  entrant dans le nœud  $\Gamma^-$  ou sortant  $\Gamma^+$ . De plus, la somme des proportions doit être égale à 1 si l'élément

consomme, 0 sinon :  $\sum_{k \in V} a_i^k = x_i$  avec  $V$  l'ensemble d'arête du graphe  $G(U, V)$ . La loi de conservation peut s'appliquer à n'importe quel sous-graphe de  $G$ . Pour le cas de la source ou du puits, un arc fictif  $(t, s)$  entre ses derniers permet d'appliquer la loi.

3. Contraintes de capacité : pour chaque arc  $k \in V$ ,  $c_k \leq \sum_{i=1 \rightarrow n} a_i^k w_i \leq C_k$ .

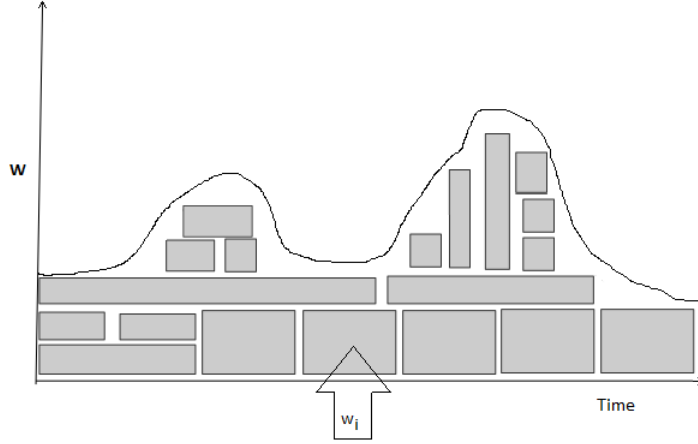


FIGURE 5.3.1 – Problème de sac à dos du Smart Grid.

Notre problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{maximize} & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Le problème est difficilement solvable du fait que chaque composante  $x_i$  soit un entier prenant pour valeur 0 ou 1. La contrainte  $x \in \{0, 1\}^n$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_i^2 - x_i \leq 0 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases} \quad \forall i.$$

Dorénavant, le problème possède des contraintes quadratiques :

$$\begin{cases} \text{maximize} & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & \langle x, 1 - x \rangle \leq 0 \end{cases}$$



### 5.3.2 Vers un problème de maximisation convexe

Nous cherchons à résoudre un problème dont le domaine de faisabilité soit un polytope non-nul. Pour cela, nous appliquons la méthode des multiplicateurs de Lagrange sur la dernière contrainte.

**Définition 26.** Multiplicateurs de Lagrange. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{cases} (A)$$

avec  $f(x)$  et  $g_i(x)$  des fonctions au moins une fois dérivable et continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Alors } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } (A) \iff \begin{cases} \text{minimize} & \mathcal{L}(x, \lambda) \\ \text{subject to} & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \text{ avec } \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x).$$

Dans notre cas nous obtenons :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^n$  tel que

$$(1) \iff \begin{cases} \text{maximize} & \mathcal{L}(x, \lambda) = \langle c, x \rangle - \lambda \langle x, 1 - x \rangle \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Simplifions la fonction-objectif :

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle - \lambda \langle x, 1 - x \rangle &= \langle c, x \rangle - \langle x, \lambda \rangle + \|x\|^2 \\ &= \langle c - \lambda, x \rangle + \|x\|^2 \\ &= \left\| x - \frac{c - \lambda}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{c - \lambda}{2} \right\|^2 \\ &= \|y\|^2 - \left\| \frac{c - \lambda}{2} \right\|^2 \text{ avec } y = x - \frac{c - \lambda}{2} \end{aligned}$$

Le problème final est le suivant :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^n$  tel que

$$\begin{cases} \text{maximize} & \|y\|^2 - C \\ \text{subject to} & Ay \leq b - AC \\ & -C \leq y \leq 1 - C \end{cases} \text{ avec } C = \left\| \frac{c - \lambda}{2} \right\|^2.$$

**Problème.** Dans la suite de ce chapitre, nous prendrons en considération le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{maximize} & \|x\|^2 \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{NM})$$

Nous sommes donc en présence de  $m$  contraintes, la matrice  $A$  est de dimension  $(m, n)$ , avec  $m \gg n$ . L'ensemble des contraintes forme un espace fermé, un polyèdre  $D$  ayant au plus  $C_m^n$  sommets, dont l'intérieur est non nul. Il s'agit d'un problème de maximisation convexe.

Le problème des méthodes énoncées dans la sous-section 5.2 est le temps de convergence des algorithmes. Dans certains cas, les algorithmes de coupe créent de nouvelles contraintes presque parallèle et proche de celles déjà existantes. Dans les cas des énumérations, il peut s'avérer être très long voire impossible de trouver tout les points candidats même avec une heuristique -  $2^n$  solutions locales et  $3^n$  points critiques au maximum. C'est pourquoi nous cherchons de nouveaux moyens de réduire  $D$  et de le couper dans le but de trouver un bon candidat optimal local ou d'obtenir la solution globale.

De plus, dans le cadre du Smart Grid, il est préférable de trouver une solution dans l'intervalle d'une itération afin de pouvoir ajuster les paramètres en temps réel. Les méthodes classiques tels que le Branch and Bound peuvent ne pas converger avant le début d'une nouvelle itération, les algorithmes proposés doivent fournir une bonne approximation du problème lorsque le délai est terminé.

## 5.4 Résultats préliminaires

### 5.4.1 Méthode de la recherche locale

Afin de trouver une solution locale dans les algorithmes suivant, nous effectuons une recherche locale à partir d'un point  $x^0$  dans le domaine réduit  $D$  :

$$\begin{cases} x^0 \in K \\ x^{k+1} = \operatorname{argmax}\{\langle \nabla f(x^k), x \rangle \mid x \in D\} \end{cases}$$

avec  $f(x)$  la fonction objectif d'un problème de maximisation.

Pour trouver une solution, nous devons avoir convergence, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} \rangle &\geq \langle \nabla f(x^k), x \rangle \\ \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &\geq 0 \\ \forall x \in D, \text{ alors } x^k &\in D \\ 0 &\leq f(x^{k+1}) - f(x^k) \text{ par convexité de } f. \end{aligned}$$

Pour  $x^*$  une solution locale, il y a convergence car  $\langle f(x^*), x - x^* \rangle \leq 0, \forall x \in D$ .

Nous avons donc si  $x^{k+1} = x^k$  alors  $x^k$  est une solution locale comme le montre la figure 5.4.1.

### 5.4.2 Méthode de la coupe par plan

Soit un maximum local  $y \in D$  un sommet du polytope  $D$ . Suivant  $n$  arêtes en  $y$ , nous trouvons  $n$  points  $y^1, y^2, \dots, y^n$ , qui sont l'intersection des frontières du domaine avec la courbe de niveau  $\{x \mid f(x) = f(y)\}$ . Soit  $I(y) = \{i \mid \langle a^i, y \rangle = b_i\}$  l'ensemble des contraintes actives par la solution  $y$  et soit  $\bar{A} = \{a^i \mid i \in I(y)\}$ . Nous avons

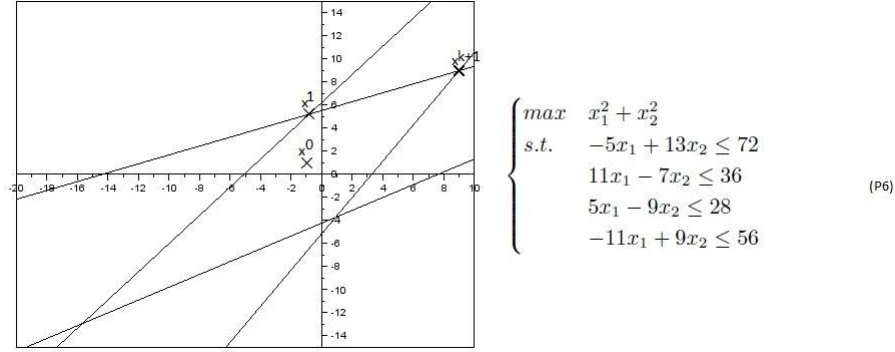


FIGURE 5.4.1 – Obtention d'un maximum local par recherche local.

$inv(\overline{A}) = \{d^1, \dots, d^n\}$  les directions des arêtes au point  $y$ . Nous cherchons les points  $y^i$  tel que  $f(y + \alpha_i d^i) = f(y)$  donc  $y^i = y + \alpha_i d^i$ .

Ensuite, l'hyperplan  $\{x \mid \langle c, x \rangle = \gamma\}$  contenant ces points est construit [32]. Pour cela il faut résoudre le système d'équation suivant afin de déterminer la normale de l'hyperplan :

$$\{\langle c, y^i \rangle = 0, , \text{ avec } \langle c, y \rangle < \langle c, y^1 \rangle\}$$

l'hyperplan de coupe a donc pour équation :  $\langle c, x \rangle = \langle x, y^1 \rangle$ .

Nous rajoutons la nouvelle contrainte au problème initial :

$$\begin{cases} \text{maximize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in D \\ & \langle c, x \rangle \geq \langle c, y^1 \rangle. \end{cases}$$

Notons que ce problème n'est pas équivalent au problème initial.

### 5.4.3 Maximum d'une boule

Soit  $w \in \mathbb{R}^n$  le centre d'une boule, soit  $r > 0$  son rayon, alors la boule est définie par :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - w\|^2 \leq r^2\}.$$

**Lemme 1.** *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} \text{maximize} & \|x\|^2 \\ \text{subject to} & \|x - w\|^2 \leq r^2 \end{cases} \quad (\text{SNM})$$

Le point  $u = \left(1 + \frac{r}{\|w\|}\right) w$  résout (SNM).

*Démonstration.* Les conditions de KKT (par le lagrangien) donnent l'équation suivante  $u : \exists \alpha \geq 1$  tel que  $u = \alpha w$ . La solution globale est sur les frontière de la boule

$$\|x - w\|^2 = \|\alpha w - w\|^2 = r^2, \alpha \geq 1,$$

après factorisation nous obtenons une équation du second degré

$$(\alpha - 1)^2 = \frac{r^2}{\|w\|^2}, \alpha \geq 1.$$

La solution du problème est

$$u = \left(1 + \frac{r}{\|w\|}\right) w, r > 0.$$

□

#### 5.4.4 Maximum d'une boîte

Soient  $L_i, U_i \in \mathbb{R}^n$  tel que  $L_i < U_i, i = 1 \rightarrow n$ . La boîte est définie par :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : L_i \leq x_i \leq U_i, i = 1 \rightarrow n\}.$$

**Lemme 2.** *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} \text{maximize} & \|x\|^2 \\ \text{subject to} & L_i \leq x_i \leq U_i, i = 1 \rightarrow n \end{cases} \quad (\text{BNM})$$

La solution est un point  $v$  tel que :  $v_i = \begin{cases} L_i, \text{ if } |L_i| > |U_i| \\ U_i, \text{ if } |L_i| \leq |U_i| \end{cases} \quad i = 1 \rightarrow n.$

*Démonstration.* Le problème est séparable, c'est à dire que chaque dimension est optimisable séparément. Le problème est donc, pour  $i = 1 \rightarrow n$  :

$$\begin{cases} \text{maximize} & x_i^2 \\ \text{subject to} & L_i \leq x_i \leq U_i \end{cases}$$

L'optimum global pour chaque sous-problème est  $v$  tel que :

$$v_i = \begin{cases} L_i, \text{ if } |L_i| > |U_i| \\ U_i, \text{ if } |L_i| \leq |U_i| \end{cases} \quad i = 1 \rightarrow n.$$

□

## 5.5 Approximation interne et externe

Les différentes approximations du domaine de faisabilité donnent un encadrement de la solution optimale. La plus grande boule interne offre une approximation interne tandis que la plus petite boîte externe offre une approximation externe.

La solution optimale de  $(SNM)$  est strictement inférieure à celle de  $(NM)$  car la solution se trouve forcément sur un sommet du polytope. Nous avons donc l'encadrement suivant de la solution de  $(NM)$  :

$$\max_{x \in S} f(x) < \max_{x \in D} f(x) \leq \max_{x \in B} f(x)$$

où  $S$  est la plus grande boule interne et  $B$  est la plus petite boîte externe.

### Plus grande boule interne

Hendrix et al. [28] propose l'approximation interne d'un domaine convexe suivant la taille maximale de diverse formes basé sur les normes. Dans nos algorithmes, nous utilisons la norme 2, ou norme Euclidienne.

Soit  $r(x)$  le rayon de la plus grande boule interne dans  $D$  avec  $x \in \text{Int}(D)$  son centre. En d'autres mots,  $r(x)$  représente la distance minimale entre le point  $x$  aux frontières du domaine. Soit  $r_i(x)$  la distance à la contrainte  $i$ . Nous rappelons que la distance de  $y \in \mathbb{R}^n$  à un hyperplan  $\{x : \langle a^i, x \rangle = b_i\}$  est

$$r_i(x) = \inf_y \left\{ \|x - y\| : \langle a^i, x \rangle = b_i \right\} = \frac{b_i - \langle a^i, x \rangle}{\|a^i\|}.$$

Dans notre contexte,  $\|a^i\| = 1, \forall i$ . Sinon, nous pouvons normaliser de la façon suivante :

$$b_i = \frac{b_i}{\|a^i\|}, \quad a_i = \frac{a_i}{\|a^i\|}, \quad r_i(x) = b_i - \langle a^i, x \rangle$$

de plus

$$r(x) = \min\{b_i - \langle a^i, x \rangle : i = 1 \rightarrow m\}.$$

Le rayon, à partir d'un point  $x$ , satisfait

$$r(x) \leq b_i - \langle a^i, x \rangle, \quad i = 1 \rightarrow m.$$

Notons que  $r(x)$  est une fonction concave. De plus,  $x \in D$  si et seulement si  $r(x) \geq 0$ .

Le problème de trouver la plus grande boule interne est équivalent à trouver le plus grand  $r(x)$ , voir Figure 5.5.1. Ce problème de minimisation convexe s'écrit :

$$\begin{cases} \text{maximize} & r \\ \text{subject to} & r \leq -\langle a^i, x \rangle + b_i : i = 1 \rightarrow m \end{cases}$$

Nous reformulons le problème sous la forme d'un programme linéaire en dimension  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\begin{cases} -\text{minimize} & -x_{n+1} \\ \text{subject to} & \langle a^i, x \rangle + x_{n+1} \leq b_i : i = 1 \rightarrow m \end{cases} \quad (\text{SLP})$$

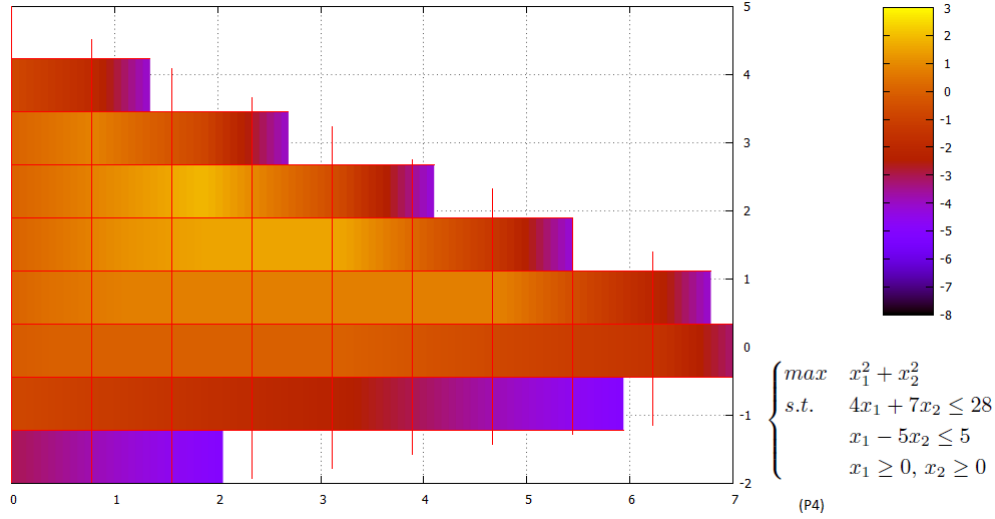


FIGURE 5.5.1 – Recherche du centre de plus grande sphère interne.

### Plus petite boîte externe

Dans le but de former la plus petite boîte externe, nous devons calculer les vecteurs  $U$  et  $V$  tel que chaque composante soit la borne supérieur et inférieur pour chaque composante  $x_i$  de  $x \in D$ . Dans le cadre de notre problème  $(NM)$ , trouver ces vecteurs revient à résoudre les problèmes linéaires suivant :

$$U_i = \operatorname{argmax} \left\{ \langle e^i, x \rangle : Ax \leq b \right\}, \quad L_i = \operatorname{argmin} \left\{ \langle e^i, x \rangle : Ax \leq b \right\}, \quad i = 1 \rightarrow n.$$

## 5.6 Vérification des conditions d'optimalité

**Proposition 2.** Soit  $y$  une solution locale de  $(NM)$  et  $v$  la solution globale de la plus petite boîte externe. Si  $y = v$ , alors  $y$  est une solution globale de  $(NM)$ .

*Démonstration.* Nous avons  $D \subset B$ , cela implique :  $f(v) \geq f(x)$ ,  $x \in D$ . Lorsque  $v = y$ , l'inégalité  $f(y) \geq f(x) \forall x \in D$  est vérifié, donc  $y$  est un optimum globale de  $(NM)$ .  $\square$

Il est aussi possible de vérifier si la solution n'est pas une solution globale. Pour une fonction différentiable convexe  $f(\cdot)$  la condition d'optimalité peut être écrite

$$z = \operatorname{argmax}(NM) \Rightarrow \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq 0, \forall x \in D, \forall y : f(y) = f(z).$$

Nous disons que la contrainte  $j$  est inactive au point  $y \in D$  si  $\langle a^j, y \rangle < b_j$ . Pour  $j$  une contrainte inactive, nous considérons le problème convexe suivant :

$$\begin{cases} \text{maximize} & \langle a^j, x \rangle \\ \text{subject to} & f(x) \leq f(y), x \in D_j \end{cases}$$

où  $a^j \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur normal de la  $j$ -ième contrainte et  $D_j$  est défini ainsi

$$D_j = \{x \mid \langle a^k, x \rangle \leq b_k, \forall k \neq j\}.$$

**Théorème 4.** [20] Soit  $w^j = \operatorname{argmax}\{\langle a^j, x \rangle \mid f(x) \leq f(y), x \in D_j\}$ . Si  $\langle a, w^j \rangle < b_j$ , alors  $y$  n'est pas un optimum global de  $(NM)$ .

La coupe par plan fournit une autre condition d'optimalité.

**Proposition 3.** Soit  $\hat{x}$  la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{maximize} & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to} & x \in D \end{cases} \quad (\text{CP})$$

où  $c$  est le vecteur normal de la coupe par plan du maximum local  $y$ , tel que  $\langle c, y_1^k \rangle > \langle c, y^k \rangle$ . Si  $\langle c, \hat{x} \rangle < \langle c, y_1^k \rangle$  alors  $y$  est un maximum global.

*Démonstration.* Voir algorithme 5.1. Soit  $\langle c, x \rangle = \gamma$  l'équation du plan de coupe de  $y$ , et  $\langle c, \hat{x} \rangle = \hat{b}$  avec  $\hat{x}$  la solution de  $(CP)$ . Soit  $\mathcal{L}_f(\alpha)$  l'espace de Lebesgue de  $f$  en  $\alpha$  définit par :

$$\mathcal{L}_f(\alpha) = \{x \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Si  $\gamma < \hat{b}$  alors  $\exists x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{b} \geq \langle c, x \rangle \geq \gamma$ . De plus,  $\forall x \in D, \langle x, c \rangle \leq \hat{b}$ , donc  $\exists x \in D \mid \hat{b} \geq \langle c, x \rangle \geq \gamma$ . Le domaine n'est pas vide.

Si  $\gamma > \hat{b}$  alors  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle c, x \rangle \leq \hat{b} \leq \gamma$ . De plus,  $\forall x \in D, \langle x, c \rangle \leq \hat{b}$ . Donc,  $\nexists x \in D \mid \langle c, x \rangle \geq \gamma$ , le domaine après coupe est vide.

Rappelons une propriété de la coupe :

$$\{x \in D \mid \langle c, x \rangle \leq \gamma\} \subset \mathcal{L}_f(f(y)).$$

Si le domaine est vide alors  $\{x \in D \mid \langle c, x \rangle \leq \gamma\} \iff x \in D$ . En d'autres termes,  $\forall x \in D, f(x) \leq f(y)$ , donc  $y$  est un optimum global de  $D$ .  $\square$

Il existe certaine configuration où le domaine n'est pas vide après une coupe à partir de l'optimum globale, fig. 5.6.1. Les candidats aux coupes doivent donc être gardés en mémoire.

---

**Algorithme 5.1** Coupe par plan.

Soit un maximum local  $y^k$  un sommet et un polytope fermé  $D^{k-1}$  représente le domaine après la  $(k-1)$ -ième coupe par plan.

Suivant  $n$  arêtes en  $y^k$ , nous obtenons  $n$  points  $y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k$ , les intersections entre les arêtes et la courbe de niveau  $\{x \mid f(x) = f(y^k)\}$ . Soit  $c$  la normal du plan formé par les  $n$  points tel que  $\langle c, y_1^k \rangle > \langle c, y^k \rangle$ .

1. Si il existe  $y_i^k \in D^{k-1}$ , alors le domaine est non-vide et  $y^k$  est un maximum local.
  2. Si chaque point  $y_i^k \notin D^{k-1}, i = 1 \rightarrow n$ , alors  $D^k$  est non-vide et  $y^k$  est indéfinissable. Néanmoins  $y^k$  peut être l'optimum global.
  3. Si chaque point  $y_i^k \notin D^{k-1}, i = 1 \rightarrow n$  et  $D^k$  est vide alors  $y^k$  est un optimum global sur  $D^k$ .
- 

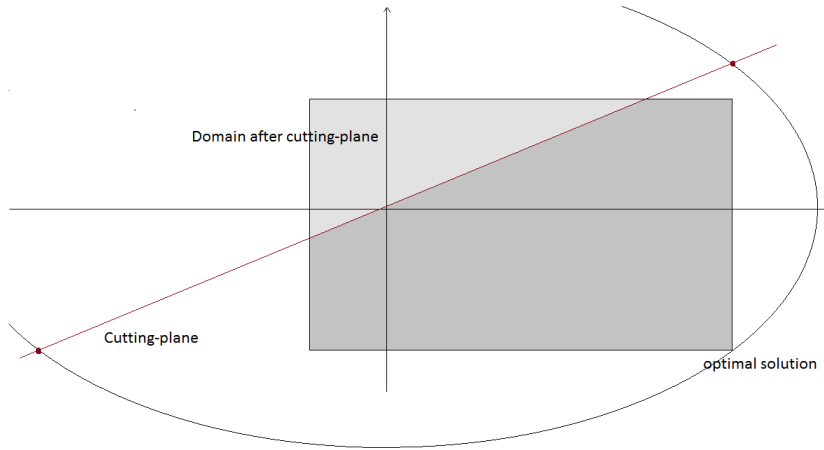


FIGURE 5.6.1 – Coupe par plan.



## 5.7 Algorithmes

Nous présenterons deux méthodes. La première, nommée (*IA*), est basé sur une approximation interne du domaine de faisabilité par la plus grande boule interne. La deuxième, nommée (*IOA*) combine l'approximation interne par la plus grande boule et l'approximation externe par la plus petite boîte.

### 5.7.1 Approximation interne : algorithme 5.2

Tant que le rayon  $r$  de la plus grande boule interne n'a pas atteint une valeur seuil, nous réduisons le domaine itérativement par la tangente à la boule de centre  $w$  au point  $u$  solution de (*SNM*). La nouvelle contrainte temporaire est

$$\langle w, x \rangle \geq \langle w, u \rangle \iff \langle w, x \rangle \geq \|w\|^2 + r^2.$$

La prochaine plus grande boule interne est recherché dans

$$D \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x \rangle \geq \|w\|^2 + r^2\}.$$

Par la suite, nous recherchons un candidat à la coupe par plan en effectuant une recherche locale à partir du dernier  $u$  calculé.

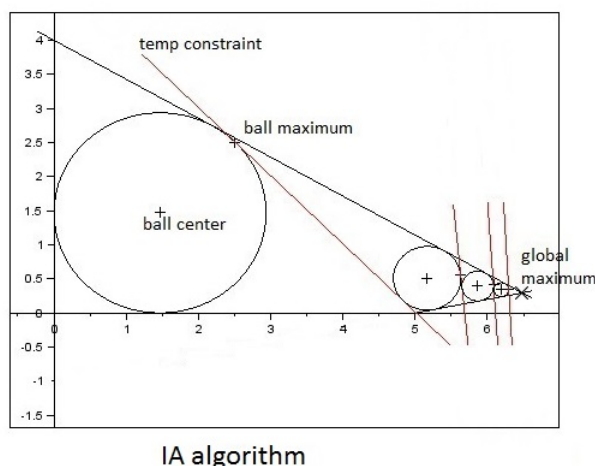


FIGURE 5.7.1 – Algorithme IA

### 5.7.2 Combinaison avec l'approximation externe : algorithme 5.3

La combinaison des solutions  $u$  et  $v$  des problèmes d'approximation interne et externe donne un meilleur candidat pour la recherche locale. Si  $v \in D$  alors  $v$  est l'optimum global. Sinon, il faut trouver le candidat pour la recherche locale. Ce point est l'intersection entre le segment  $[uv]$  et les frontières de  $D$ . En effectuant une combinaison convexe de  $u$

---

**Algorithme 5.2** Approximation interne (IA).

Entrée	: $Ax \leq b$
Sortie	: un optimum global

**Début** $r_{min} = \epsilon$  et  $condition = false$ **Tant que** ( $condition = false$ )    **Tant que** ( $r > r_{min}$ )        Trouver  $r, w$  la solution de( $SLP$ )        Trouver  $u$  l'optimum global de ( $SNM$ )        Ajouter une contrainte temporaire : ( $NM$ ) :  $\langle w, x \rangle \geq \|w\|^2 + r^2$     **Fin Tant que**

Effacer toutes les contraintes temporaires

    Recherche locale à partir de  $u$     **Si** (les conditions sont vérifiées) Alors         $condition = true$ 

Garder en mémoire le dernier optimum

**Sinon**

Faire une coupe par plan

Garder en mémoire le dernier optimum

**Fin Si****Fin Tant que**

Trouver le plus grand optimum en mémoire

**Fin**

---

et  $v$  nous trouvons l'intersection avec les frontières de  $D$ . Dans un premier temps, nous calculons l'intersection du segment avec chaque contrainte violée par  $v$  :

$$\langle a^i, u + \alpha_i(v - u) \rangle = b_i \text{ avec } i = 1 \rightarrow m \text{ et } 0 \leq \alpha_i \leq 1.$$

L'intersection la plus proche de  $u$  est un point sur les frontières de  $D$  :  $\alpha = \min\{\alpha_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1\}$ .

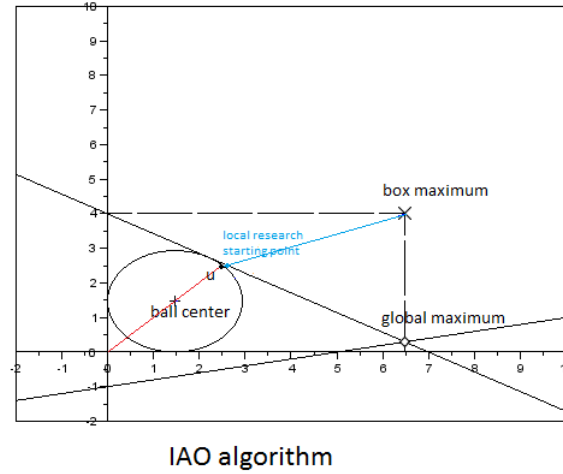


FIGURE 5.7.2 – Algorithme IOA.

### 5.7.3 De la boîte à l'hyper-rectangle

L'approximation par une boîte n'est pas représentative de la forme du domaine. En effet, la boîte est construite suivant les bornes inférieurs et supérieurs du domaine par rapport à chaque dimension, et non par rapport à la forme du domaine. Afin de fournir une meilleure approximation du domaine, nous cherchons l'hyper-rectangle le plus petit circonscrit au domaine. Ce dernier est défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimize} & \prod_{i=1}^n \langle d^i, U_i - L_i \rangle \\ \text{subject to} & U_i = \operatorname{argmax} \{ \langle d^i, x \rangle : Ax \leq b \}, i = 1 \rightarrow n \\ & L_i = \operatorname{argmin} \{ \langle d^i, x \rangle : Ax \leq b \}, i = 1 \rightarrow n \end{cases}$$

Ce problème est plus complexe que  $(NM)$ , nous devons donc trouver un autre moyen de résoudre ce problème.

Soit une matrice  $\mathcal{K}$  définit comme suit :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^n \end{pmatrix} \text{ with } \langle d^i, d^j \rangle = 0, i \neq j \text{ and } \det(\mathcal{K}) \neq 0$$

---

**Algorithme 5.3** Approximation interne et externe (IOA).

Entrée	: $Ax \leq b$
Sortie	: un optimum global

**Début***condition* = *false***Tant que** (*condition* = *false*)    Résoudre (*SLP*)    Trouver *u* l'optimum global de (*SNM*)    Trouver *v* l'optimum global de (*BNM*)    Trouver le point d'intersection entre [*uv*] et les frontières du domaine

Recherche locale en partant du point d'intersection

**Si** (les conditions sont vérifiées) Alors        *condition* = *true*

Garder en mémoire le dernier optimum

**Sinon**

Faire une coupe par plan

Garder en mémoire le dernier optimum

**Fin Si****Fin Tant que**

Trouver le plus grand optimum en mémoire

**Fin**

---

A partir d'une direction  $d^i$ , il existe une infinité de base orthonormale. Il est donc difficile de trouver au hasard une base orthonormale réduisant le volume de l'hyper-rectangle. Pour trouver  $\mathcal{K}$ , nous utiliserons le processus de Gram-Schmidt [30] résumé dans l'algorithme 5.4.

---

**Algorithme 5.4** Processus de Gram-Schmidt.

---

Notons  $proj_u(v)$  la projection de  $v$  sur  $u$  tel que

$$proj_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Soient  $v^1, \dots, v^n$ ,  $n$  vecteurs, nous définissons la récurrence suivante :  $u^1 = v^1$ ,  $u^2 = v^2 - proj_{u^1}(v^2)$  et

$$u^k = v^k - \sum_{i=1}^{k-1} proj_{u^i}(v^k).$$

La base formée par l'ensemble  $\{u^1, \dots, u^n\}$  est orthonormale.

---

Nous choisissons  $u^1 = v^1 = d^1$ . Dans un premier temps,  $d^1$  est une arête au point  $y$  et  $v^2, \dots, v^n = e^2, \dots, e^n$ . Donc, la base  $\mathcal{K}$  est une rotation de la base orthonormée du problème qui transforme  $e^1$  en  $\frac{d^1}{\|d^1\|}$ .

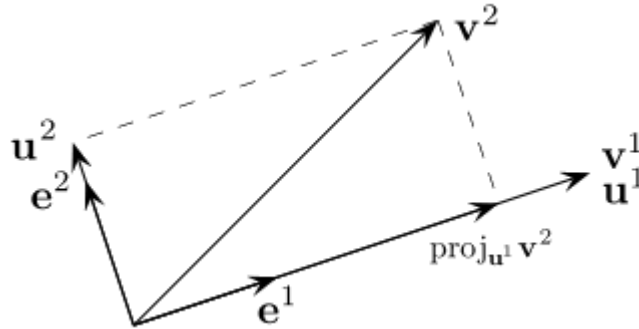


FIGURE 5.7.3 – Algorithme de Gram-Schmidt.

L'optimum global  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  de l'hyper-rectangle est :

$$z_i = \begin{cases} |\langle d^i, L_i \rangle|, & \text{if } |\langle d^i, L_i \rangle| > |\langle d^i, U_i \rangle| \\ |\langle d^i, U_i \rangle|, & \text{if } |\langle d^i, L_i \rangle| \leq |\langle d^i, U_i \rangle| \end{cases} \quad i = 1 \rightarrow n.$$

Ce processus ne garantit pas une diminution du volume de l'hyper-rectangle. Des tests doivent être effectués afin de trouver la meilleure stratégie de choix des vecteurs

$v^1, \dots, v^n$  de l'algorithme.

#### 5.7.4 Résultats

Les deux algorithmes ont été testés sur des problèmes de maximisation convexe provenant de "A collection of test problems for constrained global optimization algorithms" [19] (noté : TP# le numéro du test) et "An algorithm for maximizing a convex function over a simple set" [17] (noté : P# le numéro du test).

Les algorithmes ont été implémentés sur Scilab, les programmes linéaires sont résolus par le solveur Linpro de Quapro. Les tests sont effectués sur un ordinateur possédant un processeur InterCore2 Duo, 3.16GHz CPU et 4GB de RAM.

Les résultats sont présentés dans la table suivante dont les colonnes sont les suivantes :

1. Le nombre de variables.
2. Le nombre de coupe effectué pour l'algorithme IA.
3. Le nombre de coupe effectué pour l'algorithme IOA.
4. La valeur optimale obtenue.
5. La valeur de l'optimum globale.
6. Le temps de calcul de l'algorithme IA en secondes.
7. Le temps de calcul de l'algorithme IOA en secondes.

Problem	n	iIA	iIAO	best value	optimal value	tIA	tIAO
TP2.1	5	3	3	-17	-17	0.1	0.2
TP2.6	10	2	4	-39	-39	0.3	0.7
TP2.7.1	20	3	2	-394.7506	-394.7506	1.5	1
TP2.7.3	20	3	2	-8695.01193	-8695.01193	1.5	1
P4	2	1	1	42.0976	42.0976	0.1	0.1
P6	2	2	1	162	162	0.1	0.1
P11	100	2	1	1541089	1541089	6	2.5
P11	200	2	1	4150.41013	4150.41013	35	14.7

Le problème de sac à dos reste partiellement résolu. En effet, il reste à déterminer la valeur des lagrangiens, bien que ces derniers peuvent être déduits d'une solution possible (nous n'avons alors plus de garantie de l'optimum global).

## **Conclusion**

L'analyse mathématique du problème général permet de connaître la répartition optimale de l'énergie dans un Smart Grid selon une configuration donnée. Le calcul de l'utilité est primordial dans la résolution du problème, et la solution finale, que ce soit par rétroaction ou par la résolution mathématique, dépend de cette dernière. Le rôle de l'analyse mathématique est d'ajuster le calcul de l'utilité afin de le processus de résolution par rétroaction offre un résultat proche de l'analyse mathématique.

Le choix des processus d'apprentissage est complexe et les résultats dépendront de la configuration des Smart Grids. Il est donc préférable à première vue d'ajuster manuellement les différents paramètres. L'établissement d'une intelligence artificielle, indépendante d'une entité externe, permettrait de rendre le modèle totalement indépendant.

## Conclusion et perspectives

Après une étude de la littérature scientifique et industrielle, nous avons déduit que le Smart Grid est un système complexe comportant une part sociétale. L'hétérogénéité de ses éléments, leur intérêt divergeant, la diversité des sous-systèmes rend les Smart Grids difficilement modélisable par une analyse cartésienne. Nous avons donc adapté l'analyse systémique, basé sur l'étude des agents et de leur interaction, aux systèmes complexes.

Un Smart Grid est composé de trois sous-systèmes distincts, possédant leur propre dynamique et leur propre intérêt. L'optimisation de ces derniers, que ce soit intrinsèque ou globale, ne doit pas mettre en péril la stabilité des autres sous-systèmes. L'optimisation d'un système socio-technique complexe regroupe diverse théories afin de prendre en compte chacun des aspects des problèmes de modélisation des Smart Grids. Nous proposons une modélisation intégrative stigmergique. Cette dernière simule un Smart Grid paramétrable au niveau des centrales, des consommateurs ainsi que des énergies renouvelables. Les tests effectués présentent des résultats prometteurs : l'offre et la demande convergent, les énergies renouvelables sont privilégiées au niveau local, la gestion de la domotique permet de réguler la courbe de consommation globale.

La simulation ne présente pas les théories avancées présentées le chapitre 4. Néanmoins, ces dernières ont déjà prouvé leur efficacité dans des problèmes de routage aérien ou de gestion d'une ressource commune. De même, l'intégration de la modélisation mathématique fait défaut. Ces extensions de notre modélisation sont essentielles pour l'intégration d'un module économique, formant un nouveau sous-système du réseau énergétique.

Nous ne présentons pas les stratégies de gestion des batteries, des véhicules électrique dans ce manuscrit. Ce travail a été effectué par Yann Hermans, doctorant à l'Université de Versailles. Ces méthodes et planifications font office de module en aval dans notre modèle. Un modèle proposant une compétition entre producteur est étudié en collaboration avec l'école Supélec, ainsi qu'un réseau de capteur offrant des données en temps réel sur les différentes énergies renouvelables.

Nous travaillons actuellement sur l'aspect économique. Bien que les options d'analyse des gains soient définies, les différents coûts structurelles, sociaux et matériels sont souvent inconnus. Le modèle possède de nombreuses fonctions d'utilités, mais ces dernières ne sont pas représentatives des coûts réels, et la simulation présente donc des résultats non réalistes. Nous travaillons en collaboration dans le projet EPIT 2.0 comprenant Bouygues, Renault, l'école Supélec, ainsi qu'avec l'observatoire Saint-Quentin-en-Yvelines dans le domaine socio-économique. Par ailleurs, il est à noter que le modèle est sans contexte, il est donc possible de modifier les différentes variables une fois ces



dernières définies.

# Bibliographie

- [1] Murat Ahat, Soufian Ben Amor, Marc Bui, Alain Bui, Guillaume Guérard, and Coralie Petermann. Smart grid and optimization. *American Journal of Operations Research*, 3 :196–206, 2013.
- [2] R. Albert, I. Albert, and G.L. Nakarado. Structural vulnerability of the north american power grid. *Physical Review E*, 69(2) :025103, 2004.
- [3] S. Arianos, E. Bompard, A. Carbone, and F. Xue. Power grids vulnerability : a complex network approach. *Arxiv preprint arXiv :0810.5278*, 2008.
- [4] A.L. Barabasi and RE Crandall. Linked : The new science of networks. *American journal of Physics*, 71 :409, 2003.
- [5] Richard Bellman. Functional equations in the theory of dynamic programming. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 41(7) :482, 1955.
- [6] ZT Belmandt. Basics of pretopology. *Hermann éditeur*, 2011.
- [7] Dimitri P Bertsekas. Nonlinear programming. 1999.
- [8] Janusz Bialek, E ACHA, CR FUERT-ESQUIVEL, and H AMBRIZ-PEREZ. Topological generation and load distribution factors for supplement charge allocation in transmission open access. discussion. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(3) :1185–1193, 1997.
- [9] C. Block, D. Neumann, and C. Weinhardt. A market mechanism for energy allocation in micro-chp grids. In *Hawaii International Conference on System Sciences, Proceedings of the 41st Annual*, pages 172–172. IEEE, 2008.
- [10] S. Borenstein, M. Jaske, and A. Rosenfeld. Dynamic pricing, advanced metering, and demand response in electricity markets. 2002.
- [11] D.P. Chassin and C. Posse. Evaluating north american electric grid reliability using the barabasi-albert network model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 355(2-4) :667–677, 2005.
- [12] J.W. Chinneck. Practical optimization : a gentle introduction. *Systems and Computer Engineering, Carleton University*. Available at : <http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po.html>, 2006.
- [13] Richard D Christie, Bruce F Wollenberg, and Ivar Wangensteen. Transmission management in the deregulated environment. *Proceedings of the IEEE*, 88(2) :170–195, 2000.

- [14] S.C. Davis, S.W. Diegel, R.G. Boundy, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge National Laboratory. Center for Transportation Analysis, United States. Dept. of Energy. Office of Energy Efficiency, and Renewable Energy. Transportation energy data book : Edition 28. Technical report, Oak Ridge National Laboratory, 2010.
- [15] Brandon Davito, Humayun Tai, and Robert Uhlaner. The smart grid and the promise of demand-side management. *McKinsey on Smart Grid*, pages 38–44, 2010.
- [16] US DOE. Grid 2030 : A national vision for electricity’s second 100 years, 2003.
- [17] R Enhbat. An algorithm for maximizing a convex function over a simple set. *Journal of Global Optimization*, 8(4) :379–391, 1996.
- [18] Xi Fang, Satyajayant Misra, Guoliang Xue, and Dejun Yang. Smart grid – the new and improved power grid : A survey. 2011.
- [19] C. A. Floudas and P. M. Pardalos. *A collection of test problems for constrained global optimization algorithms*, volume 455 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [20] Dominique Fortin and Ider Tseveendorj. Piece adding technique for convex maximization problems. *Journal of Global Optimization*, 48(4) :583–593, 2010.
- [21] Thomas W Gedra. On transmission congestion and pricing. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 14(1) :241–248, 1999.
- [22] Jean-Michel Glachant and Virginie Pignon. Nordic congestion’s arrangement as a model for europe ? physical constraints vs. economic incentives. *Utilities policy*, 13(2) :153–162, 2005.
- [23] N. Goldenfeld and L.P. Kadanoff. Simple lessons from complexity. *Science*, 284(5411) :87–89, 1999.
- [24] J.J. Grefenstette. Optimization of control parameters for genetic algorithms. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 16(1) :122–128, 1986.
- [25] G. Guérard, S.B. Amor, and A. Bui. Survey on smart grid modelling. *International Journal of Systems, Control and Communications*, 4(4) :262–279, 2012.
- [26] G. Guérard, S. Ben Amor, and A. Bui. A complex system approach for smart grid analysis and modeling. *International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Engineering Systems*, 243 :788–797, 2012.
- [27] Morgan A Hanson. On sufficiency of the kuhn-tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80(2) :545–550, 1981.
- [28] Eligius MT Hendrix, Carmen J Mecking, and Theo HB Hendriks. Finding robust solutions for product design problems. *European Journal of Operational Research*, 92(1) :28–36, 1996.
- [29] P. Hines, S. Blumsack, E. Cotilla Sanchez, and C. Barrows. The topological and electrical structure of power grids. In *System Sciences (HICSS), 2010 43rd Hawaii International Conference on*, pages 1–10. IEEE, 2010.

- 
- [30] Walter Hoffmann. Iterative algorithms for gram-schmidt orthogonalization. *Computing*, 41(4) :335–348, 1989.
  - [31] Reiner Horst. *Introduction to global optimization*. Springer, 2000.
  - [32] Reiner Horst, Panos M. Pardalos, and Nguyen V. Thoai. *Introduction to global optimization*, volume 3 of *Nonconvex Optimization and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
  - [33] Reiner Horst and H Edwin Romeijn. *Handbook of global optimization*, volume 2. Springer, 2002.
  - [34] Reiner Horst and Hoang Tuy. *Global optimization : Deterministic approaches*. Springer, 1996.
  - [35] C.J. Kim and O.B. Obah. Vulnerability assessment of power grid using graph topological indices. *International Journal of Emerging Electric Power Systems*, 8(6) :4, 2007.
  - [36] S. Kirkpatrick, MP Vecchi, et al. Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598) :671–680, 1983.
  - [37] Thomas S Kuhn and Laure Meyer. *La structure des révolutions scientifiques*, volume 2. Flammarion Paris, 1983.
  - [38] Ashwani Kumar, SC Srivastava, and SN Singh. Congestion management in competitive power market : a bibliographical survey. *Electric Power Systems Research*, 76(1) :153–164, 2005.
  - [39] Vincent Levorato, Murat Ahat, et al. Modélisation de la dynamique des réseaux complexes associée à la prétopologie. *Actes des articles courts de la société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision*, pages 299–300, 2008.
  - [40] D.J.C. MacKay, D. Hafemeister, et al. Sustainable energy - without the hot air. *American Journal of Physics*, 78 :222, 2010.
  - [41] M. Mitchell. Complex systems : Network thinking. *Artificial Intelligence*, 170(18) :1194–1212, 2006.
  - [42] A.H. Mohsenian-Rad, V.W.S. Wong, J. Jatskevich, and R. Schober. Optimal and autonomous incentive-based energy consumption scheduling algorithm for smart grid. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2010*, pages 1–6. Ieee, 2010.
  - [43] A. Molderink, M.G.C. Bosman, V. Bakker, J.L. Hurink, and G.J.M. Smit. Simulating the effect on the energy efficiency of smart grid technologies. In *Winter Simulation Conference (WSC), Proceedings of the 2009*, pages 1530–1541. IEEE, 2009.
  - [44] J.A. Momoh. Optimal methods for power system operation and management. In *Power Systems Conference and Exposition, 2006. PSCE'06. 2006 IEEE PES*, pages 179–187. IEEE, 2006.
  - [45] J.A. Momoh. Smart grid design for efficient and flexible power networks operation and control. In *Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE'09. IEEE/PES*, pages 1–8. IEEE, 2009.

- [46] D.E. Newman, B.A. Carreras, V.E. Lynch, and I. Dobson. The impact of various upgrade strategies on the long-term dynamics and robustness of the transmission grid. In *Proc. Conf. Electricity Transmission in Deregulated Markets*, page 2004, 2004.
- [47] Panos M Pardalos and Christodoulos A Floudas. *Recent advances in global optimization*. princeton University press, 1992.
- [48] Panos M Pardalos and J Ben Rosen. *Constrained global optimization : algorithms and applications*. Springer-Verlag New York, Inc., 1987.
- [49] AD Peacock and M. Newborough. Controlling micro-chp systems to modulate electrical load profiles. *Energy*, 32(7) :1093–1103, 2007.
- [50] M Pipattanasomporn, H Feroze, and S Rahman. Multi-agent systems in a distributed smart grid : Design and implementation. In *Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE'09. IEEE/PES*, pages 1–8. IEEE, 2009.
- [51] Robert G Pratt, P Balducci, Clint Gerkenmeyer, Srinivas Katipamula, Michael CW Kintner-Meyer, Thomas F Sanquist, Kevin P Schneider, and TJ Secrets. The smart grid : an estimation of the energy and co2 benefits. 2010.
- [52] Eric Rasmusen and Basil Blackwell. *Games and information*, volume 2. Cambridge, 1994.
- [53] Narayan S Rau. Transmission loss and congestion cost allocation-an approach based on responsibility. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 15(4) :1401–1409, 2000.
- [54] R Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*, volume 28. Princeton university press, 1997.
- [55] L.A. Segel and I.R. Cohen. *Design principles for the immune system and other distributed autonomous systems*. Oxford University Press, USA, 2001.
- [56] J.S. Simonoff, C.E. Restrepo, and R. Zimmerman. Risk-management and risk-analysis-based decision tools for attacks on electric power. *Risk Analysis*, 27(3) :547–570, 2007.
- [57] Alexander S Strekalovsky. Global optimality conditions for nonconvex optimization. *Journal of Global Optimization*, 12(4) :415–434, 1998.
- [58] D.J. Watts. *Six degrees : The science of a connected age*. WW Norton & Company, 2004.
- [59] D.J. Watts and S.H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684) :440–442, 1998.
- [60] A. Wright and S. Firth. The nature of domestic electricity-loads and effects of time averaging on statistics and on-site generation calculations. *Applied Energy*, 84(4) :389–403, 2007.
- [61] Chien-Ning Yu and Marija D Ilic. Congestion clusters-based markets for transmission management. In *Power Engineering Society 1999 Winter Meeting, IEEE*, volume 2, pages 821–832. IEEE, 1999.

# **Annexes**



# Publication

## Journaux

1. Guérard, G., Amor, S. B., & Bui, A. (2012). Survey on smart grid modelling. *International Journal of Systems, Control and Communications*, 4(4), pp. 262-279.
2. Ahat, M., Amor, S. B., Bui, M., Bui, A., Guérard, G., & Petermann, C. (2013). Smart grid and optimization. *American Journal of Operations Research*, 3, 196.

## Conférences internationales

1. Guérard, G., Amor, S. B., & Bui, A. (2012). A Complex System Approach for Smart Grid Analysis and Modeling. In *KES, 16th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems* (pp. 788-797), San Sebastian, Espagne.
2. MAGO14, Guérard, G., & Tseveendorj, I. (2014) Largest Inscribed Ball and Minimal Enclosing Box for Convex Maximization Problems. Malaga, Espagne.
3. IEEE/ACM'14, Guérard, G., Amor, S. B., & Bui, A. (2014). A Context-Free Smart Grid Model Using Complex System Approach. Toulouse, France.

## Conférences nationales

1. Guérard, G., Amor, S. B., & Bui, A. (2012). Approche système complexe pour la modélisation des smart grids. In *Recherche Opérationnelle et Aide à la DEcision Française (ROADEF'12)*, Angers, France (pp. 263-264).
2. Amor, S. B., Bui, A., & Guérard, G. (2013). Méthode d'Analyse d'un Système Complexe pour la Recherche Opérationnelle : Smart Grid. In *Recherche Opérationnelle et Aide à la DEcision Française (ROADEF'13)*, Troyes, France

## Articles soumis

- Optimization Letters, Guérard, G., & Tseveendorj, I. (2014) Inscribed Ball and Circumscribed Box Methods for the Convex Maximization Problem. *Article en correction.*





# Résolution d'un problème de maximisation convexe

Les algorithmes présentés dans le chapitre 5 ont été programmé via le logiciel libre Scilab développé par l'INRIA, similaire à Matlab ou Octave. Nous présenterons dans cette annexe les problèmes algorithmiques rencontrés afin de programmer les approches mathématiques.

## Trouver les arêtes du minimum local $y$

Afin d'effectuer la coupe par plan, nous devons trouver les  $n$  arêtes du minimum local  $y$ . Au niveau de ce point, il y a  $n$  contraintes actives, avec  $n$  la dimension du problème, une contrainte active étant défini comme saturée, c'est à dire que  $\langle a^i, y \rangle = b_i$ . Chaque arête est définie comme l'intersection de  $n - 1$  contraintes actives, la direction est obtenue par produit scalaire avec la normale obtenue par le système d'équation. Effectuer cette démarche pour les  $n - 1$  combinaisons de contraintes active équivaut à faire l'inverse de la matrice des contraintes actives :

$$\begin{pmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^n \end{pmatrix} = inv(I^y) \text{ avec } I^y = \{i \in I : \langle a^i, y \rangle = b_i\}$$

avec  $I$  l'ensemble des contraintes.

## Trouver les contraintes redondantes

Un problème, perturbant la recherche des arêtes du minimum local  $y$ , est dû à la présence de contraintes redondantes. Une contrainte est redondante si cette dernière ne fait pas partie du domaine de définition, ou s'il n'y a qu'un seul point en commun avec le domaine de définition. Il est donc possible de trouver plus de  $n$  contraintes actives en un minimum local. De plus, l'ajout de la nouvelle contrainte après la coupe par plan peut créer des contraintes redondantes.

Afin d'éliminer ces dernières, nous allons procéder à une recherche des frontières du domaine. Ce dernier étant convexe, nous pouvons rechercher dans n'importe quelle di-

---

rection un extrémum afin d'en connaître les contraintes actives. Nous recherchons un extrémum par recherche locale avec pour vecteur la normale d'une contrainte défini par le vecteur  $a^i$ . Si la contrainte  $i$  est présente dans la définition du domaine, alors la contrainte doit être saturée. Si ce n'est pas le cas, alors la contrainte est redondante.

Pour trouver les contraintes n'ayant qu'un seul point en commun avec le domaine de définition, nous allons fabriquer une boîte du domaine de définition avec pour contrainte égalité  $\langle a^i, x \rangle = b_i$ . Dans le cas où les minimums et maximums suivant chaque vecteur unitaire sont égaux, alors la contrainte est redondante.

### **Code source**

Vous trouverez ci-après le code intégral de la méthode IOA.

```

0001 clear
0002 tic();
0003 A = [-5 13;11 -7;5 -9;-11 9];
0004 b = [72;36;28;56];
0005
0006 // atomsInstall("quapro");
0007 // DEBUT DE LA RESOLUTION
0008
0009 rand('seed',getdate('s'))
0010 condition=0; // si =0 alors on continue
0011 coupe=0; // nombre de coupes effectuées
0012 eps = 0.0001; //marge d'erreur
0013 x0='g'; //recherche linpro à partir d'un extremum v (g pour aléatoire)
0014 debugi=0; //variable de debug
0015
0016 while (condition==0) //condition d'arret : coupe vide
0017
0018     //DEBUG MOD
0019     //condition=1 //test sur une itération
0020     //test arret apres n itérations
0021     //if (debugi==1) then
0022     //condition=1
0023     //end
0024     //debugi=debugi+1;
0025     //FIN DEBUG MOD
0026
0027     coupe = coupe+1;
0028     r=100;
0029     [nbl nbc]=size(A);
0030
0031     //Normalisation de la matrice
0032     B=A.*A;
0033     n=zeros(1,nbl)
0034     for i=1:1:nbl
0035         n(i)=sqrt(sum(B(i,:)));
0036     end
0037     for i=1:1:nbl
0038         b(i)=b(i)/n(i);
0039         for j=1:1:nbc
0040             A(i,j)=A(i,j)/n(i);
0041         end
0042     end
0043
0044     //calcul du ball center
0045     B=A;
0046     B(:,nbc+1)=ones(nbl);
0047     c=[zeros(1,nbc) -1]; c=c'
0048     [xopt,lagr,f]=linpro(c,B,b, x0)
0049
0050     //recherche du point d'intersection, point max du cercle
0051     r=xopt(nbc+1)
0052     u=0;
0053     for j=1:1:(nbc)
0054         u=u+xopt(j)^2;
0055     end
0056     u=1/u;
0057     u=(xopt(nbc+1)^2)*u;
0058     u=sqrt(u)+1;
0059     for j=1:1:(nbc)
0060         inter(j)=u*xopt(j);
0061     end
0062     mprintf("Fin maximum de la sphere\n")
0063
0064     //créer une boite
0065     B=eye(nbc,nbc)
0066     C=zeros(nbc,2)
0067     for i=1:nbc
0068         [xopt,lagr,f]=linpro(B(:,i),A,b,[],[],0,x0)
0069         C(i,1)=f
0070     end
0071     B=-B
0072     for i=1:nbc
0073         [xopt,lagr,f]=linpro(B(:,i),A,b,[],[],0,x0)

```

```

0074         C(i,2)=-f
0075     end
0076     for i=1:1:nbc
0077         if (abs(C(i,1))<abs(C(i,2)) )then boite(i)= C(i,2)
0078         else boite(i)=C(i,1)
0079         end
0080     end
0081
0082     //point d'intersection entre le segment et les contraintes
0083     for i=1:1:nbc
0084         segment(i)=(inter(i)-boite(i));
0085     end
0086     alpha=zeros(nbl)
0087     for i=1:1:nbl
0088         au=0;
0089         auv=0;
0090         for j=1:1:nbc
0091             au=au+A(i,j)*boite(j);
0092             auv=auv+A(i,j)*segment(j);
0093         end
0094         alpha(i)=(b(i)-au)/auv
0095     end
0096     mini=1
0097     for i=2:1:nbl
0098         if (alpha(i)<alpha(mini) & alpha(i)>=0) then mini=i;
0099         end
0100     end
0101     for i=1:1:nbc
0102         test(i)=boite(i)+alpha(mini)*segment(i);
0103     end
0104     temp=test;
0105     mprintf("Debut recherche locale\n")
0106     [nbl nbc]=size(A);
0107
0108     //Recherche locale
0109     locale=0;
0110     id=temp;
0111     [xopt,lagr,f]=linpro(-temp,A,b, x0)
0112     valeur=100;
0113     while (valeur>1)
0114         [xopt,lagr,f]=linpro(-temp,A,b, x0)
0115         id=temp;
0116         temp=xopt;
0117         if (temp==xopt) then valeur=1
0118         end
0119         locale=locale+1;
0120     end
0121     mprintf("Nombre de Recherche locale effectué : %d \n",locale)
0122
0123     //recherche des contraintes actives
0124     active=zeros(nbc,nbc);
0125     activeb=zeros(nbc);
0126     nbre=0;
0127     for i=1:1:nbl
0128         axopt=0;
0129         axopt = A(i,:)*temp;
0130         if (nbre<nbc) then
0131             if (abs(axopt - b(i))<eps) then
0132                 nbre=nbre+1;
0133                 active(nbre,:)=A(i,:);
0134                 activeb(nbre)=b(i);
0135                 mprintf("Nombre de contraintes actives trouvées/numero de la contrainte : %d, %d
\n", nbre,i);
0136             end
0137         end
0138     end
0139     if (nbre==nbc) then
0140         mprintf("Recherche contraintes actives : Réussi\n")
0141     else mprintf("Recherche contraintes actives : Echec\n")
0142     end
0143
0144     //recherche des directions
0145     direction=inv(active);

```

```

0146 direction=direction';
0147 for i=1:1:nbc
0148     testdirection=0;
0149     for j=1:1:nbc
0150         testdirection=testdirection+temp(j)*direction(i,j);
0151     end
0152     if (testdirection>0) then direction(i,:)=direction(i,:);
0153         mprintf("Mauvaise direction %f\n", i)
0154     end
0155 end
0156 mprintf("Recherche des directions \n")
0157
0158 //recherche des points de l'hyperplan de coupe
0159 for i=1:1:nbc
0160     direc=0;
0161     delta=0;
0162     for j=1:1:nbc
0163         direc=direc+direction(i,j)^2;
0164         delta=delta-temp(j)*direction(i,j);
0165     end
0166     alpha(i)=(2*delta)/(direc);
0167     for j=1:1:nbc
0168         points(i,j)=temp(j)+direction(i,j)*alpha(i)
0169     end
0170 end
0171 mprintf("Fin des points de coupe \n")
0172
0173 //recherche de la normale de l'hyperplan de la coupe
0174 for i=1:1:nbc-1
0175     for j=1:1:nbc
0176         vecteurnormal(i,j)=points(i,j)-points(nbc,j)
0177     end
0178 end
0179 [normal ker]=linsolve(vecteurnormal, zeros(nbc-1,1));
0180 for i=1:1:nbc
0181     normal(i)=normal(i)+ker(i)
0182 end
0183 testnormal=0
0184 w=0;
0185
0186 //on cherche la normale dirigée vers le point temp
0187 for i=1:1:nbc
0188     w=w+normal(i)*points(1,i)
0189     testnormal=testnormal+normal(i)*temp(i);
0190 end
0191 if (testnormal-w<0) then normal=-normal;
0192     mprintf("Inversion de la normale\n")
0193 end
0194
0195 //test de l'optimal global
0196 [xopt,lagr,f]=linpro(normal,A,b, x0)
0197 valeur=0;
0198 w=0;
0199 for i=1:1:nbc
0200     valeur=valeur+normal(i)*xopt(i);
0201     w=w+normal(i)*points(i);
0202 end
0203 if (w-valeur<0) then //xopt.*lambda<temp.*lambda
0204     condition=1;
0205 end
0206 if (condition==0) then
0207     mprintf("Test Globale condition : Maximum local n°%d,Coordonnées\n",coupe)
0208     for i=1:1:nbc-1
0209         mprintf("%f, ",temp(i))
0210     end
0211     mprintf("%f \n",temp(nbc))
0212     mprintf("Valeur : %f \n", sum(temp.*temp))
0213 else mprintf("Test Globale condition : Maximum global\n\n")
0214 end
0215
0216 //ajout de la nouvelle contrainte
0217 w=0;
0218 if (condition==0) then

```

```

0219     for i=1:1:nbc
0220         w=w+normal(i)*points(1,i)
0221     end
0222     for i=1:1:nbc
0223         A(nbl+1,i)=normal(i);
0224     end
0225     b(nbl+1)=w;
0226 end
0227 mprintf('\n Temps nécessaire à la résolution %.3f\n',toc());
0228 //condition=1 //test sur une iteration
0229
0230 //test de l'optimalite du point precedent
0231 if (coupe==1) then
0232     optimal=zeros(1,nbc)
0233     optimal=temp;
0234 else
0235     if (sum(optimal.*optimal)<sum(temp.*temp)) then
0236         optimal=temp;
0237     end
0238 end
0239
0240 // recherche des contraintes redondantes et reformulation de A
0241 if (condition==0) then
0242     normali=zeros(1,nbc);
0243     redondantes=zeros(nbl+1,1);
0244     me=1;
0245     cube=-eye(nbc,nbc);
0246     for i=1:1:nbl+1
0247         normali=A(i,:);
0248         [maxd,lagr,f]=linpro(-normali',A,b, x0);
0249         maxdsomme=0;
0250         for k=1:1:nbc
0251             maxdsomme=maxdsomme+maxd(k)*A(i,k);
0252         end
0253         if (maxdsomme-b(i)<-eps) then
0254             redondantes(i)=1;
0255             mprintf("Contrainte redondante test 1 : %d \n",i)
0256         else
0257             Atemp=zeros(nbl+1,nbc);
0258             btemp=zeros(nbl+1,1)
0259             for j=1:1:nbl+1
0260                 if (j<i) then
0261                     Atemp(j+1,:)=A(j,:);
0262                     btemp(j+1,1)=b(j);
0263                 end
0264                 if (j==i) then
0265                     Atemp(1,:)=A(j,:);
0266                     btemp(1,1)=b(j);
0267                 end
0268                 if (j>i) then
0269                     Atemp(j,:)=A(j,:);
0270                     btemp(j,1)=b(j);
0271                 end
0272             end
0273
0274             //on fabrique un cube avec la contrainte <ai,x>=b
0275             maxi=zeros(2*nbc,nbc)
0276             for l=1:1:nbc
0277                 [maxitemp,lagr,f]=linpro(cube(:,l),Atemp,btemp, [], [], me, x0);
0278                 maxi(l,:)=maxitemp';
0279                 [minitemp,lagr,f]=linpro(-cube(:,l),Atemp,btemp, [], [], me, x0);
0280                 maxi(nbc+l,:)=minitemp';
0281             end
0282             compteurmax=1;
0283             for m=2:1:2*nbc
0284                 if (maxi(1,:)==maxi(m,:)) then
0285                     compteurmax=compteurmax+1;
0286                 end
0287             end
0288             if (compteurmax==2*nbc) then
0289                 redondantes(i)=1;
0290                 mprintf("Contrainte redondante test 2 : %d \n",i)
0291             end

```

```

0292         end
0293     end
0294     j=1;
0295     for i=nbl+1:-1:1
0296         if (redondantes(i)==0) then
0297             G(j,:)=A(i,:);
0298             g(j)=b(i);
0299             j=j+1;
0300         end
0301     end
0302     A=G;
0303     b=g;
0304 end
0305
0306     mprintf("Fin iteration : %d \n\n",coupe)
0307 end //arret final
0308
0309 //recherche parmi les points candidats
0310 if (sum(optimal.*optimal)>sum(temp.*temp)) then
0311     temp=optimal;
0312 end
0313 sol=temp;
0314 sol(nbc+1)=0;
0315 for i=1:1:nbc
0316     sol(nbc+1)=sol(nbc+1)+temp(i)*temp(i)
0317 end
0318 sol(nbc+2)=coupe;
0319 mprintf("Solution globale (coordonnées) :\n %f",sol(1))
0320 if (nbc>1) then
0321     for i=2:1:nbc
0322         mprintf(", %f",sol(i))
0323     end
0324 end
0325 mprintf("\n Valeur optimale (norme(y)^2) %f",sol(nbc+1))
0326 mprintf("\n Nombre de coupe par plan %f",sol(nbc+2))
0327 mprintf('\n Temps nécessaire à la résolution %.3f\n',toc());

```